

RÉVISIONS D'ALGÈBRE

I. PRÉAMBULE

INTENTION Ces pages reprennent, en les approfondissant, les notions d'algèbre étudiées du collège, dans l'intention de **prévenir** les erreurs les plus classiques rencontrées dans les copies de seconde. Les erreurs effectivement commises révèlent qu'il y a beaucoup de choses à dire. Elles sont dites ici et puisqu'il y en a beaucoup, le texte manque de **concision**. D'autant que ce qui est important est souvent répété. En **contrepartie**, ces révisions d'algèbre, cours et exercices, ont fait la preuve de leur efficacité. Malgré ma volonté d'exhaustivité, tout n'est pas traité. Ainsi, si vous ne savez plus additionner ou multiplier des fractions, si vous avez oublié les critères de divisibilité (les nombres divisibles par 3 sont les nombres dont la somme des chiffres, etc.) il faudra revoir cela par vous-mêmes.

CONVENTIONS

La flèche «  » sert à décrire une erreur. La police de caractère « **Blue Highway** » est utilisée pour faire ressortir les mots de langue française un peu rares. Ils sont expliqués dans le **glossaire** du dernier paragraphe, que je vous invite à lire entièrement dès à présent. La **police manuscrite** marque les mots mathématiques au moment de leur introduction. Le plus souvent, lors de cette première **occurrence**, ils sont définis ou du moins expliqués.

RÉFÉRENCE Lorsqu'un choix de vocabulaire devait être fait, j'ai pris pour référence le *Dictionnaire des Mathématiques Élémentaires* de Stella Baruk, publié au Seuil. Je le recommande à tous ceux qui souhaitent comprendre en profondeur les notions de base des mathématiques.

MODE D'EMPLOI DU COURS

Imprimez ces pages (de préférence en recto verso), **agrafez** les feuilles ainsi obtenues (ou reliez-les d'une façon efficace) et apportez-les en classe pendant tout le premier trimestre. **Avant** que nous n'abordions un nouveau paragraphe d'exercices, lisez et relisez attentivement, plume à la main, la partie du cours correspondante. Si le sens d'un mot de langue courante vous échappe, pensez à consulter un dictionnaire – il devrait être à vos côtés pendant la lecture. Et apprenez ce mot : tout bon lycéen doit tenir un cahier de vocabulaire. Le **vocabulaire mathématique** introduit ou rappelé doit être maîtrisé dans les deux sens : si l'on vous demande comment s'appelle un terme d'une somme, vous devez immédiatement pouvoir répondre « facteur » et si l'on vous demande inversement ce qu'est un facteur, vous devez pouvoir dire que c'est un terme d'une somme. (Sur le site *MathEnSeconde.fr*, un chapitre zéro, consacré au vocabulaire, pourra peut-être vous aider.)

Les **théorèmes** et **définitions** encadrés doivent être sus par cœur. Notez par écrit toutes vos questions (le **pléonisme** est volontaire, il marque ici, plaisamment et pesamment à la fois, mon insistance).

MODE D'EMPLOI DES EXERCICES

Une erreur qui n'a pas été correctement analysée par son auteur se renouvellera impitoyablement, jusqu'à ce qu'elle reçoive une



explication *ad hoc*. Par conséquent, lorsque vous aurez la « chance » de commettre une erreur (dans un exercice, en contrôle), ne laissez pas passer cette occasion de progresser. L'erreur n'est que la manifestation ponctuelle d'une mauvaise conception que vous vous faites des choses. Il s'agit de saisir au vol cette possibilité de corriger non pas l'erreur en elle-même, mais l'incompréhension sous-jacente. Car derrière les règles du calcul algébrique, d'aspect mécanique, se trouvent des théorèmes, qui demandent à être compris, démontrés et surtout, intuitivement assimilés.

Systématiquement, il vous faudra contrôler votre réponse dès que vous l'aurez écrite. Pas avant, car vous risqueriez de viser plus ou moins consciemment la réponse officielle en faisant un peu n'importe quoi pour parvenir au but. Mais sans tarder non plus, car si vous avez commis une erreur, à quoi bon commettre la même plusieurs fois de suite ?

Si erreur il y a, votre mission sera de trouver où elle se situe précisément et de comprendre en quoi elle en est une (d'erreur). C'est là qu'une intervention extérieure s'avèrera peut-être indispensable. C'est là que votre professeur, notamment, va vous servir à quelque chose : n'effacez pas vos calculs erronés (jamais) et allez plutôt les lui présenter : c'est en les étudiant qu'il pourra vous aider. Le simple fait qu'il vous indique à quel endroit précisément se trouve votre erreur vous sera une aide précieuse ; parfois suffisante, pas toujours. Il arrive que ce ne soit qu'à l'issue d'un dialogue, que le professeur parvienne à comprendre ce que vous ne comprenez pas. À vous de ne pas accepter de ne pas comprendre, de ne pas abandonner trop facilement et

surtout, dans ce dialogue, de faire votre part du travail : un simple « je n'ai pas compris » ne donne aucun indice au professeur, qui ne lit pas dans vos pensées. Insistez s'il le faut, tant qu'un malentendu demeure.

Le corrigé détaillé, à cette étape, ne vous sera d'aucun secours : on n'explique pas une erreur en lui substituant une « non-erreur ». Le corrigé ne propose qu'un cheminement juste parmi d'autres. Or ce cheminement juste ne vous dira pas en quoi le votre est faux. Si vous aviez seulement suivi une « mauvaise méthode », celle-ci n'aurait pas dû aboutir à un résultat faux : elle ne vous aurait pas permis d'aller jusqu'au bout. (Et dans ce cas, la consultation du corrigé détaillé aurait peut-être été bénéfique.)

Prenez votre temps. Ne sautez pas d'étape. Lorsque vous hésitez, ralentissez au lieu d'accélérer. Le but n'est pas que vous traitiez le plus de questions possible. Ne passez pas à la question suivante avant d'avoir entièrement analysé vos erreurs. Et puis écrivez lisiblement, même au brouillon.

Pour progresser, il vous faudra aussi réviser, vous entraîner. Pour cela, refaites les questions où vous avez commis des erreurs en première instance. Tant que vous ne dominez pas les exercices, vous devrez persévérer. Vous pourrez par exemple continuer à consacrer un quart d'heure tous les deux jours à l'entraînement d'algèbre même lorsque, en classe, nous aurons commencé de nouveaux chapitres.

L'expérience montre qu'une fois les exercices de ce chapitre maîtrisés, la suite de l'année en est considérablement facilitée.

ASPECT THÉORIQUE

Mes collègues pourront lire ce cours comme une tentative de classification des erreurs d'algèbre, dont on découvrira qu'elles ont la richesse et la profusion des figures de style.

CORRECTION

À propos d'erreur, merci de m'aider en signalant toutes celles, même infime, que vous rencontreriez. ☺ (Ce sera l'unique *smiley* de tous mes cours : on n'est pas là pour rigoler.)

II. LECTURE

L'ORAL ET L'ÉCRIT

Vous devez savoir *prononcer* ce que vous écrivez, en algèbre. Vous devez aussi pouvoir *en parler*. Soyez donc attentif à la prononciation de chaque signe et apprenez à maîtriser le vocabulaire. C'est là que des mots malheureusement devenus un peu rares, comme « commutativité », « somme algébrique », « coefficient », « monôme », constituent les instruments inestimables d'une prise de possession de l'algèbre. Ils permettent non seulement d'énoncer des règles, mais aussi de formuler à leur sujet des questions, mais encore d'analyser les erreurs qui leur contreviennent. Pour réviser le vocabulaire, vous pouvez vous aider du chapitre zéro du site.

FORME

Donner la **forme** d'une expression, c'est dire s'il s'agit d'une somme, d'une différence, d'un produit, d'un quotient...

Une **opération** est comme une machine, qui, à partir de deux nombres, appelés **termes**, en produit un nouveau appelé **résultat**. Lorsqu'on écrit « $3+5$ », cela *exprime* déjà le résultat de l'addition. « $3+5$ » est déjà le nombre 8, mais exprimé sous la **forme** d'une *somme*.

Opération	Expression	Forme / Résultat	Nom des termes
addition	$a+b$	somme	« parts »
	$a+b+c$	« poly-somme »	
	$a-b+c$	somme algébrique	« termes algébriques »
soustraction	$a-b$	différence	
multiplication	ab	produit	facteurs
	abc	« poly-produit »	
division	$\frac{a}{b}$	quotient	dividende, diviseur (numérateur, dénominateur)

COMMENTAIRES

- De façon un peu audacieuse, nous proposons des mots nouveaux là où il en manque. Ces **néologismes** sont écrits entre guillemets. Dans le tableau qui précède, ce sont : « poly-somme », « poly-produit », « parts » et « termes algébriques ».
- Les nombres relatifs conduisent à oublier la soustraction en voyant toute *différence* (et même toute somme) comme une petite *somme algébrique*. Nous reverrons cela dans le paragraphe *Somme Algébrique*. Ce point de vue conduit à simplifier la première partie du tableau précédent :

addition	$a + b$	somme algébrique	« termes algébriques »
	$a + b + c$		
	$a - b + c$		
	$a - b$		

CONVENTIONS

- Ce sont d'abord les **parenthèses**, crochets, accolades, qui nous indiquent comment sont groupés les termes d'une expression. Ainsi, « $(2+3) \times 4$ » se lit « deux-plus-trois,... fois quatre ». Les parenthèses servent à faire de la somme « $3+4$ » un seul terme, qui est déjà le nombre 7, mais pas encore calculé. D'autres procédés ont été utilisés aux XV^e et XVI^e siècles pour grouper les termes, comme le trait horizontal, supérieur : $\overline{2+3} \times 4$ (survivant dans notre notation des racines) ou la virgule : $2+3, \times 4$.
Mais si l'on ne comptait que sur les parenthèses, les expressions algébriques seraient souvent illisibles. L'efficacité de l'algèbre tient en

partie à ce que d'autres conventions, judicieusement filtrées par le tamis de la tradition, permettent d'alléger considérablement les expressions, les rendant plus lisibles et mieux manipulables. Ainsi, une expression comme :

$$\left\{ \left[4 \times (x^2) \right] + \left[-(6 \times x) \right] \right\} \div \left[(2 \times x) + (-3) \right]$$

deviendra plus clairement, grâce aux conventions expliquées ci-après :

$$\frac{4x^2 - 6x}{2x - 3}$$

qu'un œil exercé saura alors simplifier en : $\boxed{2x}$.

(L'idée étant ici de penser à *factoriser* le numérateur. Nous verrons cela plus en détail dans le paragraphe sur les quotients.)

En l'absence de parenthèses, voici donc quelles règles décrètent la façon dont on doit lire une expression :

- Lorsqu'il n'y a **que des** $\times$, l'expression prend la forme de ce que j'appelle un « **poly-produit** ». Par exemple : « $2 \times 3 \times 4 \times 5$ ». Or dans un « poly-produit », on peut grouper les termes comme on veut sans que cela n'ait d'incidence sur le résultat. Donc on ne prendra pas la peine d'alourdir un « poly-produit » par des parenthèses somme toute inutiles. Au moment de le calculer, toutefois, il faudra bien décider de la façon dont on veut grouper les facteurs (autant que possible astucieusement), donc rétablir des parenthèses et faire le calcul en plusieurs étapes. En l'occurrence, on a intérêt à calculer ainsi :

$$2 \times 3 \times 4 \times 5 = (2 \times 5) \times (3 \times 4) = 10 \times 12 = \boxed{120}.$$

Nous reviendrons plus en détail sur la notion de « poly-produit ».

- Lorsqu'une expression **mélange les signes** $+$, $-$ et $\times$, en l'absence de parenthèses, il est nécessaire que des conventions décident de règles de lecture. Il a été établi (et c'est une bonne décision, car cela facilite les choses par la suite) que le signe $\times$ collait les termes et que les signes $+$ et $-$ les séparaient :

« $2 + 3 \times 4$ » se lit « deux plus, ... trois-fois-quatre » et signifie donc : $2 + (3 \times 4)$.

Si l'on calcule l'expression, on commencera par la multiplication. C'est ce qui fait dire que la multiplication est *prioritaire*.

- Lorsque des termes sont **juxtaposés**, c'est-à-dire posés l'un contre l'autre, collés, lorsqu'il n'y a aucun signe pour les séparer, il faut considérer qu'il y a une multiplication. C'est une convention : la juxtaposition marque une multiplication dans l'écriture algébrique moderne, mais elle peut marquer l'addition ou même la soustraction en d'autres circonstances (pensons à l'écriture en chiffres romains). Cette « **juxtaposition multiplicative** » est en harmonie avec la décision de poser que la multiplication agglomère les termes, alors que le $+$ et le $-$ les séparent :

- $2a$ se lit « deux-z-a » (avec la liaison). Et signifie deux fois a , de la même façon que « deux cent » signifie deux fois cent.
- ab signifie de même a fois b .
- $2ab$ est donc un « poly-produit » : $2 \times a \times b$.
- $a(b+c)$ se lit « a , **facteur de**, b -plus- c » et signifie : $a \times (b+c)$.
- $(a+b)(c+d)$ se lit « a -plus- b , **facteur de**, c -plus- d » et signifie : $(a+b) \times (c+d)$.



- $-2(a+b)(c+d)$ se lit : « moins-deux, **facteur de**, a -plus- b , facteur de, c -plus- d .

Lire ainsi « facteur de » sert à faire entendre qu'il y a des parenthèses.

On n'écrit pas « $a5$ », mais « $5a$ », car « a cinq » signifie « a puissance 5 ». À la lecture, il y aurait donc ambiguïté.

Évidemment, entre deux nombres écrits en chiffres, la juxtaposition n'est pas multiplicative : 23 ne signifie pas « deux fois trois », mais « vingt-trois ».

D'autre part, pour que la juxtaposition soit multiplicative, il faut qu'il n'y ait pas de signes $+$ ou $-$ pour séparer les termes. Ainsi, $-3(-2)$ signifie -3 **fois** -2 alors que $(-2)-3$ signifie -2 **plus** -3 , car il s'agit d'une *somme algébrique*. Qu'est-ce qu'une *somme algébrique* ? Justement, j'y viens.

- Lorsqu'il n'y a **que des $+$ et des $-$** entre les termes (mais pas de parenthèses), l'expression est une **somme algébrique**. Elle doit se lire en marquant une pause avant les signes $+$ et $-$:

« $5 - 6 + 3$ » se lit : « 5 -6 +3 », « cinq, ... moins-six, ... plus-trois ».

Nous verrons dans le paragraphe *Somme Algébrique*, que cette pause marque une addition entre des nombres relatifs. Ainsi, « $5 - 6 + 3$ » signifie : $(+5) + (-6) + (+3)$. • $-2a$ peut être vu soit comme l'opposé de $2a$, soit comme -2 , multiplié par a :

$$-2a = -(2a) = (-2) \times a$$

On pourrait dire que la règle des signes, qui définit la multiplication de deux relatifs, a été faite pour que les deux interprétations reviennent au même (et aussi pour que la *distributivité*, que nous verrons plus loin, reste valable).

- Le **trait de fraction**, par sa taille et sa position sur la ligne, indique comment les termes sont groupés et joue donc un rôle de parenthèses :

$$\frac{a+b}{c} \text{ se lit : « } a\text{-plus-}b, \dots \text{ sur } c \text{ », alors que :}$$

$$a + \frac{b}{c} \text{ se lit : « } a \text{ plus, } \dots b\text{-sur-}c \text{ »}.$$

- L'exposant (puissance) est prioritaire sur tout le reste, y compris le *moins opposé* :



- $-a^2$ se lit plutôt « moins a **deux** » et signifie $-aa$ et non $(-a)(-a)$.

Pour signifier $(-a)(-a)$, il faut écrire $(-a)^2$, qui se lira plutôt « moins a **au carré** ».

- $2a^3$ se lit plutôt « deux a **trois** » et signifie $2aaa$ et non $(2a)(2a)(2a)$. Pour signifier $(2a)(2a)(2a)$, il faut écrire $(2a)^3$, qu'on lira plutôt « deux a **au cube** ».

ERREUR PAR DÉFORMATION

Voici une erreur rencontrée dans plusieurs copies lors d'un contrôle :

$$(9x^2) - 4(x^2 - 2x + 1) \rightarrow (9x^2)(-4x^2 + 8x - 4)$$

En distribuant le -4 , ceux qui ont commis cette erreur ont malencontreusement « déformé » l'expression : c'était une *somme algébrique*, ils en ont fait un *produit* ; ils ont fait apparaître une multiplication là où il y avait une addition simplement en omettant de

faire apparaître le « + » qui pouvait se permettre d'être **implicite** dans la première expression. Une part de ces élèves avaient en tête qu'il s'agissait bien d'une addition et trouvaient quand même le bon résultat, car ils se reprenaient dans les lignes suivantes. Mais les autres ont pris à la lettre ce qu'ils avaient marqué, en perdant le sens et ont distribué le $9x^2$.

On peut changer la forme d'une expression sans changer sa valeur. On dit alors que l'on **transforme** l'expression. C'est ce qui se passe, comme nous le verrons plus loin, lorsqu'on développe : on passe d'une forme *produit* à une forme *somme*, mais les expressions expriment le même nombre de deux façons différentes. Si l'on se contente de remplacer un + par un $\times$ sans compenser par quoi que ce soit cette modification, alors les deux expressions ne sont plus *égales* et il y a une erreur dans le calcul algébrique. On parlera d'erreur par « déformation ».

Cette erreur eut peut-être été évitée en marquant bien, dès le début, ce que nous appellerons plus loin une « espace additive » :

$$(9x^2) - 4(x^2 - 2x + 1) = +9x^2 - 4(x^2 - 2x + 1)$$

III. « POLY-PRODUIT »

RÉSUMÉ

Un « **poly-produit** » est une expression du genre $2 \times 3 \times 4$. Pour la calculer, il faut y placer des parenthèses et s'y prendre en plusieurs étapes.

COMMUTATIVITÉ

L'addition et la multiplication sont des opérations **commutatives** (ce qui n'est pas le cas de la soustraction ni de la division). Cela signifie qu'on peut permuter les termes d'une somme ou d'un produit sans que cela n'en affecte la valeur :

Quels que soient les nombres a et b : $a + b = b + a$

$$ab = ba$$

ASSOCIATIVITÉ

L'addition et la multiplication sont en outre **associatives** (ce qui n'est pas le cas de la soustraction ni de la division). Cela signifie qu'on peut grouper, *associer*, comme on veut les termes dans une somme (ou un produit) de trois termes :

Quels que soient les nombres a , b et c : $(a + b) + c = a + (b + c)$

$$(ab)c = a(bc)$$

« POLY-SOMMES », « POLY-PRODUITS »

L'associativité autorise à écrire sans parenthèses des « poly-sommes » ou des « poly-produits ».

Par exemple, pour calculer le « poly-produit », $2 \times 3 \times 4$, il faut choisir de placer les parenthèses d'une façon ou d'une autre. L'ambiguïté qui provenait de l'absence de parenthèses n'est pas gênante, puisque le résultat est le même dans les deux cas :

$$\begin{array}{ll} (2 \times 3) \times 4 & 2 \times (3 \times 4) \\ = 6 \times 4 & = 2 \times 12 \\ = 24 & = 24 \end{array}$$

EXEMPLES

Le principe reste le même pour tous les « poly-produits » : il faut mettre des parenthèses (ou crochets) quelque part et calculer en plusieurs étapes :

$$-2(x-1)(x+1) = -2[(x-1)(x+1)] = \dots$$

$$(x-1)(x-2)(x+1) = (x-2)[(x-1)(x+1)] = \dots$$

DÉPLACEMENT D'UN TERME

À l'intérieur d'une « poly-somme » ou d'un « poly-produit », la commutativité et l'associativité permettent de déplacer un terme :

Pour calculer $2 \times 3 \times 4 \times 5$, on peut se simplifier la vie en regroupant le 2 et le 5 :

$$2 \times 3 \times 4 \times 5 = (2 \times 5) \times (3 \times 4) = 10 \times 12 = \boxed{120}$$

Mais si l'on sort le terme de son contexte, on court le risque de changer sa valeur dans l'expression (et donc la valeur de l'expression qui le contient) :

$$5 + (2 + 5 + 8) \times 10 \rightarrow 5 + 5 + (2+8) \times 10$$

Le 5 que l'on a déplacé change de valeur : dans la première expression, il est multiplié par 10, donc vaut 50, mais dans la seconde expression, il ne vaut plus que lui-même : 5. Nous parlerons d'erreur par *téléportation*.

DÉCOMPOSITION EN FACTEURS PREMIERS

ARITHMÉTIQUE

Le mot **arithmétique** vient du grec *arithmos*, qui signifie *nombre*. Mais seulement au sens restreint de nombre *entier*. Chez **Euclide**, les fractions n'étaient pas encore considérés comme des *nombre*s et *zéro* n'existait pas. Même *un*, l'unité, nommée *monas*, n'était pas classé

dans les *arithmos*. Non contents de nous limiter aux entiers à partir de 2, nous allons aussi nous limiter à une opération : la multiplication. De façon un peu abusive, nous définirons ici l'arithmétique comme un petit îlot où seuls existent les nombres entiers à partir de 2 et où la seule opération disponible est la multiplication. À partir d'ici, plaçons-nous donc en *arithmétique*.

DÉCOMPOSITION

Lorsqu'on passe de 2×3 à 6, on fait un *calcul*. On pourrait dire que pour former le tout, qui est le nombre 6, on a pris deux éléments séparés, 2 et 3 que l'on a assemblés, comme on *compose* un bouquet avec des fleurs en *posant* des fleurs *ensemble*.

Lorsqu'on passe de 6 à 2×3 , on essaye de retrouver les facteurs qui ont permis de former le 6. On essaye de retrouver les éléments qui ont formé un tout. C'est le contraire de *composer* : cela s'appelle **décomposer**.

Décomposons à présent le nombre 12. Il y a deux façons de commencer : 2×6 ou 3×4 .

Dans le premier cas, on peut encore décomposer le facteur 6. Dans le second cas, on peut encore décomposer le facteur 4. Poursuivons la décomposition aussi loin que possible :

$$\begin{array}{ll} 12 = 2 \times 6 & 12 = 3 \times 4 \\ = 2 \times (2 \times 3) & = 3 \times (2 \times 2) \\ = \underline{2 \times 2 \times 3} & = \underline{2 \times 2 \times 3} \end{array}$$

Dans les deux cas, on parvient à la même décomposition. Ce n'est pas un hasard : un théorème important d'arithmétique (pas très facile à

prouver) nous garantit l'unicité de cette décomposition. Les facteurs 2 et 3, qui ne sont pas décomposables étaient en quelque sorte cachés dans le nombre 12. Ce sont eux qui constituent arithmétiquement le nombre 12. Ces nombres non décomposables peuvent être vus comme les entiers qui étaient là en premier et à partir desquels, par multiplication, les autres entiers ont été engendrés. On les appelle pour cela des **nombres premiers**. Et la décomposition dont nous venons d'exposer le principe s'appelle **décomposition en facteurs premiers**.

NOMBRES PREMIERS

Un nombre premier est donc *arithmos* qu'on ne peut pas écrire comme un produit de deux *arithmos*, donc un nombre entier qui n'est pas divisible, sauf par 1 et par lui-même.

Afin que le théorème portant sur l'unicité de la décomposition soit énonçable facilement, on ne souhaite pas classer le nombre 1 parmi les nombres premiers. Comme le mot *arithmos* n'est pas utilisé en français, les mathématiciens ont trouvé un subterfuge pour définir simplement un nombre premier : *n nombre premier est un entier qui a exactement deux diviseurs*. (1 et lui-même). Il y aurait tant d'autres choses à raconter sur les nombres premiers : leur étonnante répartition, la conjecture de Goldbach, le crible d'Ératosthène, les différentes applications de la décomposition en facteurs premiers... Malheureusement, on ne peut pas tout dire.

IV. SOMME ALGÈBRIQUE

RÉSUMÉ

Une **somme algébrique** est une expression du genre : $2 - 3 + 4$. Il n'y a là-dedans aucune soustraction ; seulement des additions. C'est en fait : $+2 \dots -3 \dots +4$, où les points de suspension représentent de l'addition.

LES SIGNES MOINS

Derrière le signe *moins*, couramment employé en algèbre, il s'en cache en réalité trois, que nous allons faire l'effort de distinguer, avant d'expliquer pourquoi, en définitive, il était légitime de les confondre. On pourrait objecter qu'au lieu de ces deux démarches opposées, de ce jeu à somme nulle, il serait intellectuellement équivalent et psychiquement plus reposant de ne rien faire. En réalité, cet aller-retour, neutre en apparence, donnera, à qui ignorait la coexistence de ces trois significations en une, les moyens de reprendre possession du calcul algébrique.

C'est le calcul algébrique en personne, si j'ose dire, qui a donné naissance aux nombres relatifs : ils sont issus d'un pur jeu de signes, ils sont apparus pour rendre possibles certaines manipulations algébriques et sont ainsi, par leur naissance, liés à l'algèbre littérale (même s'ils ont acquis ensuite une certaine autonomie). Au point que dans « somme algébrique », le mot « algébrique » indique justement leur présence (celle des nombres relatifs). Et c'est précisément pour mieux leur permettre de jouer leur rôle fluidifiant que le signe moins réunit en sa personne trois **acceptions**.

Il y a, donc, *trois* signes moins, qui, par ordre chronologique de leur apparition à l'école, sont :

- Le « **moins soustraction** » : « $10 - 5$ »
- Le « **moins négatif** » : « -5 »
- Le « **moins opposé** » : « $-A$ », « $-(2 + 2)$ »

Si l'on s'autorise à rétrospectivement les confondre, c'est simplement que tous trois peuvent être vus comme des *moins opposés*. En effet, « -5 » est l'opposé de 5 et « $10 - 5$ » peut (et doit) être vu comme 10 et... l'opposé de 5 : $10 - 5$ doit être vu comme une somme dont le signe *plus* n'est pas marqué et où le signe *moins* est collé au 5 : $10 \dots -5$.

Il résulte de tout cela que tout signe moins demande désormais être vu comme un *moins opposé* !

Il y a symétriquement trois signes « $+$ », qui peuvent tous être ramenés au dernier cas :

- Le « **plus addition** » : « $2 + 2$ »
- Le « **plus positif** » : « $+2$ »
- Le « **plus neutre** » (qui ne fait rien) : « $+a$ »

PRINCIPE

Une **somme algébrique** est une succession de termes séparés par des « $+$ » et de « $-$ ». Exemple : « $a - b + c$ ».

Nous appellerons ces signes « $+$ » et « $-$ » des « **signes algébriques** ». Il ne faut pas voir les « signes algébriques » comme des signes opératoires, mais comme des signes « *prédicatoires* », c'est-à-dire non pas placés entre des termes, mais devant un terme : « $a - b + c$ » doit se lire : « $a, \dots -b, \dots +c$ »,

où les silences marquent des additions **implicites**, alors que les signes + et - sont des *plus neutre* et *moins opposé*.

$a - b + c$ signifie en fait : $(+a) + (-b) + (+c)$.

« ESPACES ADDITIVES »

Par écrit, on pourra représenter ces pauses par des « **espaces additives** » (en typographie, le mot « espace » est féminin).

Tout « *signe algébrique* » (signes + et -) doit être vu comme étant précédé d'une « *espace additive* ».

N'hésitez pas à marquer ces espaces par écrit, notamment lorsque vous recopiez l'expression d'un énoncé. Vous éviterez ainsi beaucoup d'erreurs. C'est d'ailleurs ce que je fais souvent dans le corrigé. Par exemple, en recopiant « $1 - 3a(1 - 3a) + 3a$ », écrivez :

$$+1 \quad -3a(+1 - 3a) \quad +3a$$

(Cette somme algébrique est composée de trois termes.)

Nous appellerons les termes de la somme algébrique, considérés avec leur signe algébrique, bien entendu ! des « **termes algébriques** », tout simplement.

ERREUR DE « JUXTAPOSITION ADDITIVE »

Mais si l'on se laisse trop emporter par l'euphorie des « espaces additives », on risque d'en voir où il n'y en a pas. Et notamment là où il y a au contraire une « juxtaposition multiplicative ». Dans les deux cas, il y a une absence de signe opératoire qu'on peut prendre pour une addition ou une multiplication. J'appelle cela une erreur de « juxtaposition additive » :

Le « -2 » était collé multiplicativement à $(2x-1)(3x+2)$, pour former un « poly-produit ». Mais plusieurs élèves, sans doute parce que le concept de « poly-produit » les dépassaient, ont préféré voir une espace additive.

L'erreur inverse (espace multiplicative) est plus rare, mais survient aussi. Il s'agissait-là de factoriser :

L'erreur se comprend si l'on considère que la ligne précédente a été interprétée comme : $x(-2) + x(2-x)$.

Erreur similaire : $(5x+3)-1 \rightarrow -5x-3$

Il suffit de se souvenir que les « espaces additives » *précèdent* *immédiatement* chaque signe algébrique :

Espace additive

$(-2)-3$ s'écrit $(-2) - 3$. C'est une somme algébrique.

$-3(-2)$ s'écrit $-3(-2)$. C'est un produit.

Juxtaposition multiplicative

ÉLIMINATION DE LA SOUSTRACTION

Même une *différence*, à partir du moment où l'on a appris ce qu'étaient les nombres relatifs, ne doit plus être vue comme une différence, mais comme une petite *somme algébrique* :

$a - b$ doit se comprendre ainsi : $+a - b$.

$9 - 10$ doit être interprété ainsi : $+9 - 10$

De sorte qu'on pourrait dire qu'avec les nombres relatifs, il n'y a plus de soustraction. Et d'ailleurs, même une somme doit être vue comme une somme algébrique : $2 + 2$ doit s'entendre : $+2 + 2$.

DÉPLACEMENT D'UN « TERME ALGÈBRIQUE »

Une *somme algébrique* n'étant en fait qu'une « poly-somme » écrite d'une façon un peu particulière, on peut déplacer un « terme algébrique », mais attention ! à l'intérieur de sa somme algébrique et avec son signe algébrique ! Exemple :

$$\begin{aligned} -2a + 5b + 5a - 3 &= (-2a + 5a) + 5b - 3 \\ &= \boxed{+3a + 5b - 3} \end{aligned}$$

Voici un cas où l'élève (de quatrième) a neutralisé deux termes, mais qui ne sont pas dans la même somme algébrique : $\frac{4-x}{3} + x \rightarrow \frac{4}{3}$. Cela correspond à ce que j'ai appelé « erreur par téléportation », page 14.

Et voici deux cas où des élèves ont regroupé des termes, mais ont laissé s'évanouir un signe algébrique, le moins devant le terme central. En effet, ils ont vu ce moins, à cet instant-là, comme un signe opératoire. Or, ce signe opératoire n'ayant plus de terme devant lui, il perdait sa raison d'être ; il n'était plus qu'une marque de séparation entre un terme et le néant dans lequel, déséquilibré, il s'est laissé aspirer :

$$\begin{aligned} 3x - 12 - 3x &\rightarrow 12 \\ 4 - x - 4 &\rightarrow x \end{aligned}$$

V. RÉDUCTION

MONÔMES Le *monôme* est un peu la molécule de l'algèbre.

Un **monôme** est constitué de deux parties : le **coefficient**, qui dit « combien il y en a » et l'**unité**, qui nomme ce que l'on compte.

Exemples :

coefficient	unité	type d'unité
5	uns	unité numérique
3	x	} unité littérale
-5	ab	
$\frac{9}{10}$	x^5	
5	$\sqrt{2}$	unité irrationnelle (voir page 70).
7	quarts	unité fractionnaire
9	cm	unité de longueur

On met toujours le *coefficient* devant. Ainsi, on n'écrit pas « $a5$ », mais « $5a$ », car « a cinq » signifie « a puissance 5 ». À la lecture, il y aurait donc ambiguïté. (Déjà dit page 10.)

MONÔME AVEC SIGNE

$-2a$ peut indifféremment être vu comme $(-2)a$ ou comme $-(2a)$.

Ces deux expressions ont toujours la même valeur. On peut même dire que la règle des signes de la multiplication des nombres relatifs est faite pour garantir cette « pseudo-associativité ». (Cf. p10)

SOMME

Le théorème suivant ne concerne que les cas où l'unité est littérale.

Pour réduire (c'est-à-dire calculer) une somme de monômes, il faut qu'ils aient la même unité. Une somme de monômes qui n'ont pas la même unité est **irréductible**.

Lorsqu'on additionne des monômes de même unité, les coefficients s'additionnent, mais l'unité commune reste comme elle est.

(Lorsque l'unité n'est pas littérale, il arrive qu'on puisse convertir les unités en une unité commune et que cela permette de réduire :

$$2 \text{ cm} + 3 \text{ dm} + 4 \text{ m} = 2 \text{ cm} + 30 \text{ cm} + 400 \text{ cm} = 432 \text{ cm.})$$

EXEMPLES

$3x + 2x = 5x$ sur le modèle de 3 patates + 2 patates = 5 patates.
 $-5x^2 + 3x^2 = -2x^2$ les coefficients sont des nombres relatifs, mais le principe est le même.

$2x^2 + 5x$ est irréductible.

$x^2 + x$ est irréductible. C'est $1x^2 + 1x^1$.

$3x + 5 = 3x + 5\text{uns}$. C'est donc irréductible.

PRODUIT

On peut toujours calculer un produit de monômes. On multiplie les coefficients entre eux et les unités entre elles.

EXEMPLE

$$(-3x^2)(-2x) = +6x^3$$

EXPLICATION

Il faut voir le produit de deux monômes comme un « poly-produit ».

$$\begin{aligned} (-3x^2)(-2x) &= (-3) \times x^2 \times (-2) \times x \\ &= (-3) \times (-2) \times x^2 \times x \\ &= +6x^3 \end{aligned}$$

Si les coefficients sont des nombre relatifs, on peut encore séparer en deux leur multiplication : les signes d'un côté, les valeurs absolues de l'autre. Par conséquent, quand on multiplie deux monômes, on peut traiter séparément les trois parties : signe / (valeur absolue du)coefficient / unité :

$$\begin{array}{llll} (-3x^2)(-2x) : & \text{signe :} & - \text{ par } - \text{ donne } & + \\ & \text{coefficient :} & 3 \text{ fois } 2 \text{ donne } & 6 \\ & \text{unité :} & x^2 \times x \text{ donne } & x^3 \end{array}$$

Il n'est donc pas indispensable d'avoir tout présent à l'esprit en même temps.

ADDITION/MULTIPLICATION

Avec la multiplication, les unités opèrent entre elles, ce qui n'est pas le cas avec l'addition :

Addition	Multiplication
2 mille + 3 mille = 5 mille	2 mille × 3 mille = 5 millions
2 cm + 3 cm = 5 cm	2cm × 3cm = 6cm ²
2 septièmes + 3 septièmes = 5 septièmes	2 septièmes × 3 septièmes = 6 quarante-neuvièmes
2a + 3a = 5a	2a × 3a = 6a ²

L' « UN-PLICITE »

Souvent, le nombre 1 est présent sans être dit. Par exemple, on dit

« trois cents », « deux cents », mais pas « **un** cent ». Ou encore dans « deux tiers », on ne précise pas qu'on veut dire « deux tiers de un ». Le nombre 1 peut être **implicite** en tant que coefficient, exposant, diviseur, ou même en tant qu'unité :

$$a = \frac{1a^1}{1} \text{ uns}$$

Certaines erreurs peuvent être évitées simplement en explicitant le nombre 1. Voici quelques exemples :

Erreur :	Façon de l'éviter :
$a^2 + a^3 \rightarrow a^5$	$a^2 + a^3 = 1a^2 + 1a^3$ (irréductible)
$a^5 \times a \rightarrow a^5$	$a^5 \times a = a^5 \times a^1 = a^6$
$a \times \frac{b}{c} \rightarrow \frac{ab}{ac}$	$a \times \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \times \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$
$3x + 1 \rightarrow 4x$	$3x + 1 \text{ uns}$ est irréductible

VI. DÉVELOPPEMENT

OPÉRATEUR Une *opération* porte sur deux termes. Par exemple, le signe opératoire « $\times$ », est comme muni de deux places vides, qui attendent les deux facteurs : « $\square \times \square$ ». Si l'on remplit l'une des deux places seulement, par exemple avec un 3, on fabrique une écriture qui donne l'ordre de multiplier par trois : « $\times 3$ ». C'est un **opérateur**¹.

Par extension, « prendre la racine », « élever au carré », peuvent être

¹ Le mot *opérateur* a parfois aussi le sens de « signe opératoire », mais nous ne l'emploierons jamais en ce sens.

vus comme des *opérateurs*. Un opérateur est comme une *fonction* élémentaire.

Il faudrait normalement distinguer l'opérateur « $+1$ », qui donne l'ordre d'ajouter 1, du nombre relatif « $+1$ », qui indique une position par rapport à zéro. Un opérateur qui ajoute un certain nombre pourrait s'appeler un « **ajouteur** ».

Un opérateur qui donne l'ordre de multiplier par un certain nombre, comme « $\times 3$ » (ou « $3 \times$ ») pourrait s'appeler un « **multiplieur** ». Mot qu'on distinguerait (subtilement) de *multiplicateur*, qui lui, désigne seulement l'un des deux termes d'une multiplication, le terme actif, par opposition à *multiplicande* qui désigne le terme passif.

DISTRIBUTION

On dit qu'un opérateur **se distribue** sur une expression (ou plus précisément sur les termes d'une expression) pour dire qu'au lieu de l'appliquer au résultat de l'expression, à l'expression prise globalement, on peut l'appliquer à chacun de ses termes individuellement, sans que cela ne change rien. Par exemple, l'opérateur « $2 \times$ » se distribue sur une somme, comme $5 + 4$. En effet, au lieu d'écrire $2 \times (5 + 4)$, on peut écrire $2 \times 5 + 2 \times 4$. Dans les deux cas, le résultat vaut 18. Doubler une somme globalement revient à doubler chacun de ses termes séparément. Le double de la somme est égal à la somme des doubles.

LA DISTRIBUTIVITÉ

Les facteurs se distribuent sur les sommes, pas sur les produits.

EXEMPLES :

$$a(b+c) = ab+ac$$

$$a(b-c) = ab-ac$$

$$(b+c+d) \times a = ab+ac+ad$$

$$a(b-c+d) = ab-ac+ad$$

En revanche : $a(b \times c)$ n'est pas la même chose que $ab \times ac$. En effet, pour prendre un contre-exemple, le double de 10×10 n'est pas égal à 20×20 . Multiplier un produit par un nombre revient à multiplier par ce nombre l'un seulement de ses facteurs. Pour éviter de distribuer abusivement, il convient de « nettoyer » le « $a(b \times c)$ » en le débarrassant de ses signes inutiles, pour le ramener à sa plus simple expression : abc . Ce n'était qu'un « poly-produit ».

COMMENTAIRES

- Rigoureusement, ce que l'on distribue, ce n'est pas seulement le facteur, mais l'opérateur tout entier, c'est-à-dire le facteur, accompagné du signe opératoire $\times$ (ce que nous avons appelé le « multiplieur ») : $a \times (b - c + d) = a \times b - a \times c + a \times d$
- Comme vous pouvez le constater sur les exemples, le mot « somme » doit s'entendre au sens large : somme, différence, poly-somme, somme algébrique. Rappelons en effet que, grâce au nombres relatifs, on peut voir toutes ces expressions comme des *sommes*.
- Ce qui peut choquer le débutant en distributivité, c'est que la matière graphique n'est pas conservée : les deux expressions, avant et après

distribution, quoiqu'elles prennent toujours la même valeur, ne contiennent pas le même nombre de signes. C'est ainsi : il arrive qu'ils y ait plusieurs façons de dire une même chose, plus ou moins **concises**. C'est d'ailleurs pourquoi on parle de développement : on passe d'une façon plus condensée à une façon plus étendue d'exprimer la même chose.

DÉVELOPPER

Développer est un mot qui, dans un texte mathématique signifie *distribuer* les termes (d'une expression) et non pas « détailler les calculs ». Et d'ailleurs, à l'écrit, au moment où vous distribuez, pour une fois, ne détaillez pas trop vos calculs, justement. Vous devez être suffisamment entraînés aux calculs des produits de monômes pour qu'ils s'opèrent dans votre esprit comme instantanément, même si en réalité ils se font en trois parties (signe, coefficient, unité). Ainsi, quand vous développez une expression comme $-3x(-2x^2 + 5x - 1)$, évitez d'écrire la laborieuse étape :

$$\ll (-3x) \times (-2x^2) + (-3x) \times (+5x) + (-3x) \times (-1) \gg,$$

qui ne fait qu'embrouiller les esprits et risque de provoquer, par sa longueur pesante, des erreurs évitables. Calculez directement les produits de monômes, en écrivant tout de suite : $+6x^3 - 15x^2 + 3x$. Pour une fois, sauter une étape évite des erreurs. Le seul avantage de l'étape intermédiaire est qu'elle vous montre bien que chaque monôme doit être traité avec son signe. En résumé :

$$\begin{aligned}
 & -3x(-2x^2 + 5x - 1) \\
 = & \cancel{(-3x) \times (-2x^2)} + \cancel{(-3x) \times (+5x)} + \cancel{(-3x) \times (-1)} \\
 = & +6x^3 - 15x^2 + 3x
 \end{aligned}$$

SAUTEZ CETTE ÉTAPE !

Il ne faut pas non plus, lors du développement, écrire les + opératoires. Ce sont les « espaces additives » qui se chargent de l'addition ! Ainsi, en développant $2a(3a - 5b)$, n'écrivez pas : $6a^2 + -10ab$, mais simplement : $6a^2 - 10ab$.

Encore une chose : lorsqu'un exercice demande de « développer », il est sous-entendu qu'il demande de développer et de réduire.

LA « DOUBLE DISTRIBUTION »

Pour **développer** un produit de deux sommes, on distribue chaque terme de la première somme sur chaque terme de la seconde.

EXEMPLE

$$(a + b)(c + d + e) = ac + ad + ae + bc + bd + be$$

DÉMONSTRATION

On utilise à deux reprises la distribution « simple ». Dans un premier temps on considère le second facteur comme un « bloc » :

$$\begin{aligned}
 (a + b)(c + d + e) &= (a + b)(c+d+e) \\
 &= a(c+d+e) + b(c+d+e) \\
 &= ac + ad + ae + bc + bd + be
 \end{aligned}$$

LE MOINS OPPOSÉ

Le signe *moins opposé* peut être vu comme un « $(-1) \times$ », il est donc normal qu'il se comporte comme un facteur et se distribue sur les sommes, pas sur les produits.

Exemple : $\overset{\uparrow}{-}(a - b + c) = -(+a - b + c) = -a + b - c$

↑
Opposé de

Voici une erreur de distribution abusive d'un moins sur un produit,

rencontrée :

$$-(4x - 6)(-x + 3) \rightarrow (-4x + 6)(x - 3)$$

L'erreur consiste à distribuer le *moins opposé* sur les deux termes du produit : $-(AB) \rightarrow (-A)(-B)$. Dans ce sens, on pourrait croire que c'est juste, mais lisez-la dans l'autre sens : $(-A)(-B) \rightarrow -(AB)$ et l'erreur devrait vous apparaître plus clairement, puisque vous savez bien que « - par - donne + » : $(-A)(-B) = +AB$.

On évite cette distribution abusive du *moins opposé* sur un produit en voyant ce *moins opposé* comme un $(-1) \times$:

$$-(AB) = (-1) \times (A \times B) = (-1) \times A \times B = \dots$$

Attention, s'il est bon de voir le *moins opposé* comme un « $(-1) \times$ », il ne faut pas en revanche le voir comme un « $\times (-1)$ » : il ne concerne que le terme qui le suit et non celui qui le précède. Devant le *moins opposé*, il y a toujours une « espace additive ». Voici des erreurs fréquentes en quatrième :

$$(-3a + 1) - 3a \rightarrow -1$$

$$(-3a + 1) - 3a \rightarrow 6a + 1$$

Ces erreurs s'expliquent vraisemblablement par une distribution du *moins opposé* sur la somme algébrique qui le précède. (Dans le premier cas, le moins s'est aussi distribué sur le terme qui suit alors que dans le

second il ne s'est distribué que sur ce qui le précédait.) On évite ces erreurs en explicitant les « plus neutres » et les « espaces additives » :

$$+(-3a + 1) - 3a$$

LES DIVISEURS

Les diviseurs « $\div a$ » (diviser par a) peut être vu comme « $\times \frac{1}{a}$ ». Il

est donc normal qu'un diviseur fonctionne comme un facteur (ce qui n'est pas le cas d'un dividende) et se distribue aussi sur les sommes (mais pas sur les produits) : $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$

Lue de droite à gauche, cette *identité* vous semblera plus familière, puisqu'elle raconte comment calculer une somme de fractions de même dénominateur.

Les diviseurs, en revanche, ne se distribuent pas sur les produits :

$$\frac{a \times b}{c} \not\rightarrow \frac{a}{c} \times \frac{b}{c}. \text{ En effet, la moitié de } 20 \times 20, \text{ ce n'est pas } 10 \times 10.$$

Diviser un produit par un nombre revient à diviser par ce nombre l'un seulement de ses facteurs : $\frac{a \times b}{c} = \frac{a}{c} \times b = a \times \frac{b}{c}$.

LES DISTRIBUTIVITÉS

Complétons la règle de la distributivité énoncée plus haut :

Les facteurs se distribuent sur les sommes, pas sur les produits.

Les *exposants* se distribuent sur les produits, pas sur les sommes.

Rappelons qu'un *exposant*, c'est le 3 dans « 2^3 ».

EXEMPLES :

$$a(b - c + d) = ab - ac + ad$$

$$(ab)^3 = ababab = aaabbb = a^3b^3$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{aa}{bb} = \frac{a^2}{b^2}$$

En revanche :

- $a(b \times c)$ n'est pas égal à $ab \times ac$.
- $(a+b)^3$ n'est pas égal, en général, à $a^3 + b^3$. Le cube de la somme n'est pas la somme des cubes. Il est possible de développer $(a+b)^3$ (« a plus b ... au cube »), mais pour cela, il faut revenir à la définition des puissances et écrire l'expression : $(a+b)(a+b)(a+b)$. Ensuite, puisqu'il s'agit d'un « *poly-produit* », on doit le calculer en plusieurs étapes : $(a+b)[(a+b)(a+b)] = \dots$

Nous disons qu'un opérateur se distribue sur les produits pour dire qu'il se distribue sur les produits et les quotients. Et nous disons qu'un opérateur se distribue sur les sommes pour dire qu'il se distribue sur toute somme algébrique. De cette façon, les deux phrases ci-avant encadrées couvrent une très large part des questions de distributivité qu'on peut rencontrer en seconde.

LES RACINES

Nous verrons (page 83) que le radical (c'est-à-dire le signe $\sqrt{\quad}$) fonctionne comme un *exposant* (il est considéré comme l'exposant $\frac{1}{2}$).

Il est donc normal qu'il se distribue sur les produits mais pas sur les sommes.

DISTRIBUTION NAÏVE

Pour schématiser, on peut dire qu'une bonne moitié des erreurs d'algèbre effectivement rencontrées dans les copies peuvent être vues comme des distributions naïves. Parfois, l'erreur est faite sans même que celui qui la commet perçoive qu'il a procédé à une transformation : la distribution n'est même pas perçue comme telle, elle est totalement *transparente* à son auteur. Dans la langue courante en effet, « la cousin de Jules et de Barnabé », est à la fois le cousin de Jules et celui de Barnabé. En mathématiques, le carré de... a plus b , ce n'est pas la même chose que le carré de a plus celui de b . Lorsqu'on écrit « le carré de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ », le *plus* ne doit pas se lire comme une simple conjonction « et ». Le signe opératoire est en effet chargé de souder ensemble deux termes pour former un seul objet : le résultat. Le signe $+$ fait de deux « parts » une seule somme. Il faut donc bien penser « $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ » comme un seul nombre. De même que, lorsqu'on écrit « $5+3$ », on a déjà écrit le résultat de l'addition. « $5+3$ » est une façon d'exprimer le nombre 8, sous la forme d'une somme. il est vrai d'affirmer, par exemple : « $5+3$ est un nombre pair », alors que ni 5 ni 3 ne le sont.

Espérons que ce qui précède aidera à éviter les erreurs courantes du

type : $(a+b)^2 \not\rightarrow a^2 + b^2$

Ou encore : $\sqrt{a+b} \not\rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Ou encore : $\sqrt{a^2 + b^2} \not\rightarrow a + b$

Pour développer $(a+b)^2$, il faut revenir à la définition du carré d'un nombre : $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$. Ensuite, on peut distribuer terme à terme. On peut aussi utiliser le raccourci d'une *identité remarquable* (voir plus loin).

ANALYSE D'UNE EXPRESSION

Souvent, les erreurs d'algèbre se produisent dès la lecture de l'expression. On évite bien des écueils en analysant correctement une expression avant de se lancer sans les calculs ; comme un surfeur observe longuement les vagues du haut de sa dune avant de se lancer à l'eau. Prenons pour illustration l'expression suivante :

$$2 - 2(3x - 1)(-5x)$$

Il peut être tentant d'assembler ce qui se ressemble, c'est-à-dire de voir un « $2-2$ », qui pourtant n'est ici qu'un mirage. Si l'on évite cet écueil et qu'on lit dès le début l'expression ainsi :

$$+2 \quad -2(3x - 1)(-5x),$$

on évite une part importante des erreurs. Ensuite, il faut prévoir de calculer la seconde partie, qui est un « poly-produit », en deux étapes. Il vaut mieux grouper les deux derniers termes du poly-produit afin d'éviter de « déformer » l'expression :

$$+2 \quad -2[(3x - 1)(-5x)]$$

En effet, en groupant les deux premiers facteurs du poly-produit sans précaution, on court le risque de transformer une somme en produit : $\star +2 [-2(3x - 1)](-5x)$. Pour éviter cette erreur, il faut alors penser à expliciter l'addition : $+2 + [-2(3x - 1)](-5x)$.

Notons qu'en groupant plutôt les deux derniers facteurs du « triproduit », on évite l'erreur par « déformation » (p11), mais on court tout de même le risque de distribuer le -2 sur le produit qui suit. Il faut donc, au moment même où l'on ajoute les crochets,

s'apprêter à développer et réduire le produit qu'ils encadrent :

$$+2 \quad -2 \left[\underbrace{(3x-1)(-5x)}_{\text{développer et réduire}} \right]$$

Ce travail de lecture et d'analyse, préalable à tout calcul, évite une part considérable d'erreurs.

VII. DEGRÉ

DEGRÉ D'UN MONÔME

Dans un *monôme*² dont l'unité est littérale, le nombre de facteurs de l'unité est le **degré** du monôme :

$-3aaabb$ est un monôme de degré 5.

$3ab^2c$ est un monôme de degré 4.

$5a^3$ est un monôme de degré 3.

Lorsqu'il n'y a qu'une variable, le degré correspond à l'exposant portant sur cette variable.

« 12 » pouvant être vu comme « $12x^0$ », on considère que c'est un monôme de degré zéro.

POLYNÔME Une somme de monômes est un **polynôme**.

Exemple : $-3x^2 + 5x - 4$ est un *polynôme*.

² Pour la notion de *monôme*, indispensable ici, lire le paragraphe sur la *Réduction*.

DEGRÉ D'UN POLYNÔME

Le **degré** d'un polynôme est, par définition, le plus grand *degré* de ses monômes. (Une fois l'expression développée et réduite.)

$-5ab^2 + 4a^2b^3 + 3a^2b^2$ est un polynôme à deux variables, de degré

5. En effet, ses monômes sont respectivement de degrés 3, 5 et 4.

Le plus grand est 5.

$-2x^3 + 3ab^2c$ est un polynôme de degré 4.

$5x^3 - \frac{3}{7}x^2 + 5x + 1$ est un polynôme à une variable, de degré 3.



Dans un polynôme, on classe traditionnellement les monômes par degré décroissant. Si par exemple on a le polynôme $-2x + x^2 + 1$, il vaut mieux penser à l'écrire : $x^2 - 2x + 1$.

RÉDUCTION

D'après ce que nous avons vu, dans un polynôme, on peut compter ensemble les monômes de même unité, mais une somme de monômes qui n'ont pas la même unité est *irréductible*. Ainsi, une somme comme $x^2 + x^3$ est une somme de deux monômes d'unités littérales différentes : $1xx + 1xxx$. Elle est irréductible.

Cette irréductibilité est garantie par un *théorème* abordé en première (mais démontré seulement après le bac), qui dit que, sous sa forme habituelle (développée, réduite, ordonnée), un polynôme ne peut s'écrire que d'une seule façon. Une fois que les monômes de même unité littérale ont été comptés ensemble, on ne peut pas réduire davantage. (Il est important de savoir quelles sont les expressions qui sont *irréductibles*, c'est-à-dire celles pour lesquelles il n'y a plus de calcul à faire, car si l'on croit à tort qu'il faut poursuivre le calcul, on finit par commettre une erreur à force de tourner en rond.)

Ce théorème sur l'unicité de la forme développée et réduite d'un polynôme garantit qu'un polynôme n'a qu'un degré : on ne peut pas, pas égalités successives, passer d'un polynôme de degré 2 à un polynôme de degré 3. En sorte qu'à qui la notion de degré est familière, certaines erreurs paraissent grossières et sautent aux yeux ; telle l'erreur « par déformation » rencontrée au paragraphe *Lecture* :

$$(9x^2) - 4(x^2 - 2x + 1) \not\rightarrow (9x^2)(-4x^2 + 8x - 4)$$

En effet, avec un peu de pratique, on « voit » que la première expression est de degré 2 alors que celle de droite est de degré 4.

Le *degré* donne une indication précieuse sur la complexité d'une expression algébrique. Nous retrouverons cette idée lorsque nous étudierons les équations.

PRODUITS DE POLYNÔMES

Un produit de polynômes est un polynôme : il suffit de **développer** ce produit pour s'en rendre compte :

$$(x^2 + 3x + 2)(5x + 2) = 5x^3 + 17x^2 + 16x + 4$$

L'égalité ci-dessus présente le **développement** d'une expression, mais les étapes intermédiaires n'ont pas été écrites, de sortes que le calcul n'a pas été *détaillé*. Question : que peut-on dire du *degré* du polynôme produit par rapport aux *degrés* des polynômes facteurs ? Toute expression algébrique formée à partir de variables, de chiffres, et des signes +, - et $\times$ peut, après développement et réduction, être mise sous la forme d'un polynôme.



VIII. FACTORISATION

DÉFINITION

Factoriser, c'est le contraire de *développer*. Et *développer*, je vous rappelle que c'est *distribuer*.

Exemple :

$$\underbrace{a(b+c+d)}_{\text{produit}} = \underbrace{ab+ac+ad}_{\text{somme}}$$

$\xrightarrow{\text{développement}}$
 $\xleftarrow{\text{factorisation}}$

Lorsqu'on développe, ce qui est le plus courant, le plus naturel et le plus facile, on passe d'une forme « produit » à une forme « somme ». Lorsqu'on factorise, on passe donc d'une forme « somme » à une forme « produit ». Les termes d'un produit étant appelés des *facteurs*, on peut dire qu'on « met en facteurs », ou encore que l'on **factorise**.

Le problème, c'est que ce qui est facile dans un sens ne l'est pas forcément dans l'autre. Autant *développer* peut être réalisé assez « mécaniquement », autant *factoriser* demande parfois une grande créativité. Factoriser, c'est un peu remonter le courant. Ainsi, les travaux du mathématicien français Évariste Galois ont permis de prouver qu'il n'existait aucune formule générale pour factoriser les polynômes à partir du cinquième degré. Disons plus simplement qu'il ne peut exister de méthode générale de factorisation.

MÉTHODE Dans les cas simples, pour factoriser une expression (une somme ou une somme algébrique), il vous suffit de la considérer comme résultant d'un développement et d'essayer deviner l'expression initiale, qui devait avoir la forme d'un produit.

EXEMPLE D'UN CAS SIMPLE

Factorisons $ab - ac + ad$

On commence par repérer le **facteur commun** aux trois « termes algébriques », celui qui est susceptible d'avoir été distribué est le « a ». C'est donc lui qui devait être *mis en facteur*.

On commence donc par écrire : $a(\quad - \quad + \quad)$

Puisqu'il faut retrouver, par distribution du a , une somme algébrique de trois termes, il doit y avoir une somme algébrique de trois termes dans les parenthèses : $a(\quad - \quad + \quad)$

Il reste à remplir les places vides : $a(b - c + d)$.

À la fin, il faut vérifier qu'en développant, on retrouve la somme donnée au départ.

AUTRE CAS SIMPLE

Factorisons $(x-1)(3x+5) + (x-1)(2x+4)$

Ce genre d'expression est déjà à moitié factorisée. Il faut résister à la tentation de la développer, car ce serait revenir en arrière (on ne tenterait cette méthode qu'en dernier recours).

L'expression, qui est de la forme $AB + AC$, se factorise facilement par la méthode vue au paragraphe précédent : $AB + AC = A(B + C)$

Il suffit de considérer que A représente l'expression $(x-1)$, que B

représente $(3x+5)$ et que C représente $(2x+4)$. Ainsi, l'égalité précédente devient, par **substitution** :

$$\underbrace{(x-1)}_A \underbrace{(3x+5)}_B + \underbrace{(x-1)}_A \underbrace{(2x+4)}_C$$

$$= \underbrace{(x-1)}_A [\underbrace{(3x+5)}_B + \underbrace{(2x+4)}_C]$$



Attention ! Vous ne devez pas accepter de ne pas comprendre ce qui s'est passé ici. N'espérez pas pouvoir passer négligemment là-dessus sans dommage.

Il reste à réduire l'expression entre crochets (mais sans développer ! car cela déferait tout le boulot) :

$$= (x-1)(3x+5+2x+4)$$

$$= \boxed{(x-1)(5x+9)}$$

AUTRES CAS

Ensuite, il faut faire des exercices et voir au cas par cas. Posez des questions dès que vous ne comprenez pas.

QUELQUES ERREURS OBSERVÉES (PARMI D'AUTRES)

FACTORISATIONS INCOMPLÈTES

Factoriser une expression, c'est la factoriser au maximum et surtout *globalement*. Voici un exemple de factorisation qui n'est que partielle (le terme « -2 » est laissé de côté) :

$$\begin{aligned} \text{a) } & x-2 + x(2-x) \\ &= x-2 + 2x-x^2 \\ &= x(1+2-x)-2 \end{aligned}$$

PSEUDO-FACTORISATIONS

Factoriser, c'est mettre sous la forme d'un produit de *polynômes*. On ne peut pas tout factoriser. Il ne s'agit pas de « tricher » avec des dénominateurs : $x^2 + 2x + 1 = x \left(x + 2 + \frac{1}{x} \right)$. Ce n'est pas que l'égalité soit fausse ; c'est plutôt qu'il ne s'agit pas d'une vraie factorisation. Nous verrons, dans le paragraphe *Identités remarquables*, qu'il est possible de factoriser $x^2 + 2x + 1$; mais pas comme ça.

FACTORISATIONS NAÏVES



Sauriez-vous dire ce qu'on doit mettre à la place du « 2 », qui est erroné ? $(4x-6)(-2x+2) \rightarrow (2)(2x-3)(-x+1)$

On trouve aussi des erreurs du genre : $a^2 + b^2 \rightarrow (a+b)^2$.

Appelons cela une « simili factorisation naïve ».

Voici une erreur rencontrée en quatrième : $3^2 + 4^2 \rightarrow 7^2$

L'élève a su expliquer son erreur rétrospectivement, en disant qu'il avait vu le carré comme une unité (comme cm^2) et qu'il n'était donc même pas « conscient » d'avoir « factorisé » quoi que ce soit.

REMARQUES THÉORIQUES

PREUVE SAVANTE DE LA RÉDUCTION

On peut désormais jeter un regard rétrospectif sur des réductions aussi simples que $2x + 3x = 5x$ et les voir comme des factorisations.

En effet, voici la même réduction, mais avec une étape intermédiaire : $2x + 3x = (2 + 3)x = 5x$.

À QUOI SERVENT LES FACTORISATIONS ?

Les factorisations servent avant tout à résoudre des *équations* un peu compliquées, dites de degré 2 ou plus. L'idée est de tout faire passer du même côté, de factoriser et d'utiliser le théorème qui dit que « un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs s'annule ». Je ne détaille pas davantage, car nous verrons cela dans le chapitre *Égalités*.

TRANSITION

Lorsque les factorisations se compliquent, on a souvent besoin des *identités remarquables*. Ça tombe bien, on y arrive.

IX. IDENTITÉS REMARQUABLES

IDENTITÉ

Une *égalité* peut prendre des sens différents, selon le contexte. Par exemple, « $x^2 = x$ » sera plutôt vue comme une *équation*, c'est-à-dire une égalité souvent fausse, mais qui pose la question : dans quels cas suis-je vraie ? « $P = 2\pi R$ » est une *formule* qui sonne le périmètre d'un

disque *en fonction* de son rayon. « $v = \frac{d}{t}$ » est une définition de la vitesse comme étant le quotient de la distance par le temps.

Lorsqu'on fait un calcul algébrique, l'idée est de *transformer* une **expression littérale**³ (une expression contenant des lettres) en une autre. **Transformer** signifie qu'on change la *forme* de l'expression sans changer sa *valeur*. Le signe « égal » qu'on utilise signifie alors que les deux expressions entre lesquelles il est placé sont *toujours* égales, c'est-à-dire égales, *quelles que soient* les **valeurs** de leurs **variables**. On pourrait alors dire que les deux expressions, si ce n'est par la forme, au moins par le fond, sont « identiques ». On les nomme des *identités*.

Une **identité** est une égalité toujours vraie, c'est-à-dire vraie pour toutes les **valeurs** qu'on peut donner à ses **variables**.

Exemples : $x = x$
 $ab = ba$
 $a(b + c) = ab + ac$
 $x + x + x = 3x$

Rappelons le sens du nom « variable ». En algèbre, dans une expression, une lettre représente un nombre. Ce nombre est la **valeur** de la lettre. Lorsque cette valeur est fixe, comme pour π , la lettre est

³ Je renonce, pour une fois, à suivre la terminologie du Dictionnaire des mathématiques élémentaires de Stella Baruk, qui distingue les *expressions algébriques* des *expressions littérales*. Les premières contenant des chiffres et des lettres et les secondes uniquement des lettres. Je n'ai jamais encore eu besoin de cette distinction. En outre, à la pratique, il s'avère que « expression algébrique » est souvent confondu avec « somme algébrique » ; le mot « algébrique » tendant se dissoudre sous la profusion de ses acceptions.

appelée **constante**. Mais le plus souvent, cette *valeur* peut *varier* ; et la lettre s'appelle alors une **variable**.

RÔLE

Il existe un petit nombre d'*identités*, assez simples, qu'on est obligé d'apprendre par cœur. Elles s'appellent les **identités remarquables**. Ces *identités remarquables* servent avant tout à *factoriser*, dans des cas où la méthode simple déjà rencontrée, consistant à repérer un facteur commun, ne suffit pas. C'est pourquoi elles sont écrites ici dans le sens de la factorisation (mais on les démontre en développant le membre de droite). Celles du degré 2 doivent être connues parfaitement : l'invention d'identités remarquables fantaisistes est la source de multiples erreurs en seconde.

DEGRÉ 2

$\xrightarrow{\text{factorisations}}$	
$a^2 + 2ab + b^2$	$= (a + b)^2$
$a^2 - 2ab + b^2$	$= (a - b)^2$
$a^2 - b^2$	$= (a - b)(a + b)$
$\underbrace{\hspace{10em}}$	$\underbrace{\hspace{10em}}$
sommés	produits
$\xleftarrow{\text{développements}}$	



DÉMONSTRATIONS

Elles sont très simples : comme susdit, on part du membre de *droite*, on applique la définition du carré d'un nombre, puis on *développe* terme à terme. Vous devez être capables de retrouver ainsi à tout moment les trois identités remarquables au cas où vous ayez des doutes.

$$\begin{aligned}
 (a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\
 &= a^2 + ab + ab + b^2 \\
 &= \boxed{a^2 + 2ab + b^2}
 \end{aligned}$$

Même principe pour les deux autres identités.

LECTURE

La première identité se lira : « a deux plus deux ab plus b deux égale a -plus- b au carré ». (Voir explications dans le paragraphe sur les puissances.)

SOURCE DE CONFUSION

$a^2 - b^2$ et $(a-b)^2$ se trouvent toutes deux dans ces identités, mais pas à la même ligne :

$$\begin{array}{rcl}
 a^2 + 2ab + b^2 & = & (a+b)^2 \\
 a^2 - 2ab + b^2 & = & \boxed{(a-b)^2} \\
 \boxed{a^2 - b^2} & = & (a-b)(a+b)
 \end{array}$$

DOUBLE PRODUIT

On parle de **double produit** pour désigner le terme « $2ab$ » présent dans le *membre* de gauche des deux premières identités remarquables :

$$\begin{array}{rcl}
 \boxed{a^2 + 2ab + b^2} & = & (a+b)^2 \\
 a^2 - 2ab + b^2 & = & (a-b)^2 \\
 a^2 - b^2 & = & (a-b)(a+b)
 \end{array}$$

Cela signifie en fait le double *du* produit. C'est ce « $2ab$ », qui est oublié lorsqu'on distribue naïvement le carré sur la somme. Le carré de la somme de deux nombres est égal à la somme de leur carré plus le double produit.

INTÉRÊT

Il s'agit d'apprendre par cœur ces trois modèles de factorisations dont on n'aurait sans doute pas eu l'idée si on ne les avait préalablement *remarquées*. Pour parler métaphoriquement, si ce n'est pas trop demander au lecteur, ces identités nous permettent de faire des « sauts », telles des carpes cherchant à remonter le courant que nous avons déjà évoqué.

EXEMPLES Voyons à présent comment ces identités remarquables vont fonctionner. Si vous ne les avez pas pratiquées en troisième, il va vous falloir vous pencher attentivement sur les exemples qui suivent.

PREMIER EXEMPLE

On veut factoriser l'expression : $x^2 + 6x + 9$.

Ce n'est pas une expression choisie complètement au hasard : elle est faite pour se factoriser facilement à l'aide de la première identité remarquable : $a^2 + 2ab + b^2 \rightarrow (a+b)^2$.

Il faut d'abord mettre l'expression précisément sous la forme $a^2 + 2ab + b^2$.

$$\begin{aligned}
 x^2 + 6x + 9 &= x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 \\
 &= (x+3)^2
 \end{aligned}$$



Essayons d'expliquer ce qui s'est passé. Il est important que vous n'acceptiez pas de ne pas le comprendre. Ne négligez pas ce passage en espérant benoîtement que vous pourrez vous en dispenser.

En réalité, nous avons simplement appliqué la transformation : $a^2 + 2ab + b^2 \rightarrow (a+b)^2$, avec x dans le rôle de a , et 3 dans le rôle

COMMENTAIRES

- En seconde, connaître les identités remarquables de degré 3 est facultatif.
- À partir de la première et la troisième identité, on retrouve les deux autres en remplaçant b par $-b$.
- Mais que se passe-t-il si l'on opère la même substitution avec la troisième identité remarquable de degré 2 ?



X. INVERSE ET OPPOSÉ

DISTINCTION

Dans la langue courante, « inverse » et « opposé » sont synonymes. Ce n'est pas le cas en mathématiques, où l'*opposé* ressortit à l'addition alors que l'*inverse* concerne la multiplication.

OPPOSÉ

PRÉSENTATION

Deux nombres sont *opposés* lorsqu'ils « font le contraire » du point de vue de l'addition : « Après avoir ajouté 3 à un nombre, que faut-il faire pour retrouver le nombre de départ (à partir du résultat) ?

— Euh...

— Par exemple, je pense à un nombre, je lui ajoute 3 et ça donne dix.

À quel nombre ai-je pensé ?

— Ben... sept.

— Oui. Et par quelle opération peut-on trouver le sept à partir du

dix ?

— Une soustraction.

— Oui. Donc que faut-il faire au nombre dix pour retrouver le nombre de départ ?

— Soustraire 3 ?

— Exactement. Mais soustraire 3, cela revient à *ajouter* quel nombre ?

— Euh...

— Ne vous limitez pas aux nombres positifs.

— Ah ! Le nombre -3 !

— Exactement. -3 est donc l'*opposé* de 3.

PRATIQUE

— Alors l'opposé, c'est juste quand on change le signe ?

— Oui, tout simplement : l'opposé de -3 est $+3$ et l'opposé de $+3$ est -3 .

— Ben fallait le dire !

— Ben c'est dit. »

EXPRESSION

Lorsqu'un nombre est exprimé par une variable, on ne voit pas son *signe* (le $+$ ou le $-$) qui est caché dans la variable : « A » peut représenter aussi bien un nombre *positif* qu'un nombre *négatif*. Pour exprimer l'opposé de A , on peut utiliser le signe *moins opposé* et écrire : « $-A$ ». Donc $-A$ n'est pas forcément un nombre négatif : si A vaut -3 , $-A$ vaut $-(-3)$, c'est-à-dire $+3$. Il y a un signe moins devant le A et un autre à l'intérieur du A .

(On pourra relire la distinction entre les trois signes moins, page 18.)

DÉFINITION

Reprenons cela *littéralement* : partons d'un nombre N . On lui ajoute un nombre x , puis on lui ajoute l'*opposé* de x que nous noterons y .

Une fois ces deux opérations faites, on est censé retomber sur le nombre de départ : $(N + x) + y = N$.

Par *associativité* (page 13) cela revient à : $N + (x + y) = N$. On en déduit qu'ajouter la valeur $(x + y)$ revient à ne rien faire. Or il n'y a qu'un nombre qui soit *neutre* pour l'addition et c'est le nombre 0. On dit que 0 est l'**élément neutre** de l'addition. Par conséquent $x + y = 0$.

Autrement dit :

Pour définir simplement l'opposé, on pourrait prendre le critère suivant :

Deux nombres sont **opposés** lorsque leur somme est nulle.

« Ce qui est nul, c'est votre baratin : on sait bien que $+3$ et -3 , ça fait zéro !

— C'est vrai, mais ce petit détour algébrique vous aidera à mieux comprendre le cas de l'*inverse* que nous aborderons après.

— Si vous le dites... »

OPPOSÉ D'UNE SOMME

Comme nous l'avons déjà dit page 29, l'opérateur « opposé-de » se distribue sur les sommes algébriques. L'opposé d'une somme est égal à la somme des opposés :

$$-(+a - b + c) = -a + b - c$$

OPPOSÉ D'UN PRODUIT

Mais pas sur les produits (ni sur les quotients) : en général,

$-(AB) \neq (-A)(-B)$. Pour prendre l'opposé d'un produit, il suffit de prendre l'opposé d'un seul de ses facteurs. Nous avons déjà vu cela page 30.

INVERSE

PRÉSENTATION

Deux nombres sont *inverses* lorsqu'ils « font le contraire » du point de vue de la multiplication : « Après avoir multiplié par 2 un nombre, que faut-il faire pour retrouver le nombre de départ ?

— Diviser par 2 ?

— Oui. Et cela revient à multiplier par quel nombre ?

— Euh... Euh... Je ne vois pas.

— Ne vous limitez pas aux nombres entiers...

— Ah oui ! C'est $\frac{1}{2}$.

— Exactement. Multiplier par $\frac{1}{2}$ revient à diviser par 2. Donc $\frac{1}{2}$ est l'inverse de 2. (Et inversement.) »

DÉFINITION

Reprenons cela *littéralement* : partons d'un nombre N . On le multiplie par un nombre x , puis par l'inverse de x que nous noterons y . Une fois ces deux opérations faites, on est censé retomber sur le nombre de départ : $(N \times x) \times y = N$.

Par *associativité* (page 13) cela revient à : $N \times (x \times y) = N$. On en déduit que multiplier par $x \times y$ revient à ne rien faire. Or il n'y a qu'un nombre qui soit neutre pour la multiplication et c'est le nombre 1. On dit que 1 est l'**élément neutre** de la multiplication. Par conséquent $x \times y = 1$. Autrement dit :

Deux nombres sont **inverses** l'un de l'autre lorsque leur produit est égal à 1.



En considérant avec rigueur cette définition, vous pouvez réfléchir à la question de l'inverse du nombre zéro. Et aussi, trouver les deux nombres qui sont chacun son propre inverse.

PRATIQUE

Lorsqu'un nombre est écrit sous forme de fraction, il est très facile de donner son inverse. Mettons qu'on cherche l'inverse de $\frac{5}{7}$.

Cherchons-le sous forme de fraction. Il faut que : $\frac{5}{7} \times \frac{\square}{\square} = 1$. Or

pour obtenir 1, il faut avoir une fraction avec un dénominateur égal à son numérateur. Pour cela, il suffit de multiplier le 5 par 7 et le 7 par 5 :

$$\frac{5}{7} \times \frac{7}{5} = \frac{35}{35} = 1.$$

On obtient donc l'inverse d'une fraction en inversant son numérateur et son dénominateur :

L'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$.

EXPRESSION

Si le nombre que l'on souhaite inverser est écrit sous la forme d'une variable, on ne voit pas son numérateur ni son dénominateur. Si l'on souhaite exprimer l'inverse d'un nombre A, c'est pourtant très simple : A étant égal à $\frac{A}{1}$...

L'inverse de A peut s'écrire $\frac{1}{A}$.

INVERSE ET SIGNE

Remarquons que prendre l'*inverse* ne change pas le signe : l'inverse de -2 est $-\frac{1}{2}$. Vous pouvez vérifier qu'en effet, le produit de ces deux nombres est égal à 1.

INVERSE D'UNE SOMME

L'inverse de la somme n'est pas la somme des inverses. Ainsi, l'inverse de $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ n'est pas $2+3$. Pour obtenir l'inverse de $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, il vaut mieux commencer par calculer cette somme : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$. Ensuite, il

suffit d'inverser le numérateur et le dénominateur. Et l'on obtient $\frac{6}{5}$

XI. QUOTIENT

GÉNÉRALITÉS

LE TRAIT DE FRACTION

Le trait de fractions, apparu chez le mathématicien arabe Al-Hassâr au XII^e siècle, sert originellement, comme son nom l'indique, à noter des fractions, lesquelles ne sont pas à proprement parler des quotients. En effet, $\frac{7}{3}$, lu comme une fraction, soit « sept tiers », signifie : 7 tiers de un, donc 7 fois, le tiers de un, c'est-à-dire **1**, divisé par 3, puis multiplié par 7. Il se trouve, certes, que cette quantité est égale à 7 divisé par 3, et que cette égalité est vraie pour toute fraction :

$\frac{a}{b} = a \div b$. Mais c'est un *théorème* : il faut le prouver.

C'est pour cela que le trait de fraction a fini par remplacer le signe de la division.

Lorsqu'on écrit « $\frac{0,5}{x+1}$ », ce n'est pas une fraction, c'est un quotient.

Un quotient écrit avec un trait de fraction s'appelle une **écriture fractionnaire**.

NUMÉRATEUR/DÉNOMINATEUR

Pour commencer, le mot « nominateur » n'a plus sa place en mathématiques. (Il fut parfois utilisé pour dire « dénominateur », mais c'est aujourd'hui exclusivement un terme de **droit canon**.)

Dans « 7 dixèmes », le 7 sert à compter le nombre de parts. C'est le **numérateur**. Le « dix » sert à fabriquer le nom de l'unité 'fractionnaire'. Il donne son nom à l'unité, il sert à la « dénommer » (comme dans « le dénommé monsieur Bidule »). C'est le **dénominateur**. Dans une *écriture fractionnaire*, on parlera souvent, par **abus de langage** de numérateur et de dénominateur au lieu de dividende et de diviseur.

FRACTION-DE / FRACTION TOUT COURT

Mon projet n'est pas de tout reprendre à zéro, mais plutôt de désamorcer les principales erreurs commises en seconde. Donc je ne rappellerai pas ici comment on additionne ni comment on multiplie des fractions. Je peux toutefois dire un mot de ce qui, au moment d'apprendre les fractions, gêne beaucoup de collégiens :

Une fraction est toujours une fraction de quelque chose. Par exemple, pour comprendre $\frac{3}{4}$ de 100, il suffit de le lire « trois, quarts de cent » : trois fois, le quart de cent. Le quart de 100 étant égal à 25,

trois quarts de 100, c'en est le triple, donc c'est 75.

Mais $\frac{3}{4}$ tout court, alors, c'est $\frac{3}{4}$ de quoi ? Eh bien, par convention,

c'est $\frac{3}{4}$ de 1. Trois quarts du nombre **1**. Cela, malheureusement, on

ne peut pas le deviner et ce n'est pas toujours clairement dit au moment de l'apprentissage des fractions. (Nous avons déjà parlé, page 24, de ces cas où le nombre 1 est **implicite**.)

SIMPLIFICATION

RÈGLE DE TRANSFORMATION

On peut diviser (ou multiplier) par un même nombre le numérateur et le dénominateur d'une écriture fractionnaire sans changer sa valeur.

Exemples : $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$$\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$$

$$\frac{ab+ac}{ad} = \frac{a(b+c)}{ad} = \frac{b+c}{d}$$

Il s'agit d'être *aware* sur ce qu'on fait, en math. Les trois simplifications ci-dessus sont du même ordre. En effet, dans le second cas, il ne s'agit pas de se dire qu'on a « barré la même chose en haut et en bas », formulation bien trop vague et qui porte sur le signe graphique, non sur ce qu'il signifie. Il s'agit plus précisément de penser qu'on a divisé par un même nombre le numérateur et le dénominateur.

SIMPLIFICATIONS SAUVAGES

- Et c'est le numérateur pris dans son entier, considéré globalement, qu'il faut diviser, non pas une partie seulement de celui-ci (idem pour le dénominateur, bien entendu). Voici une erreur courante : $\frac{ab+c}{ad+e} \xrightarrow{\text{erreur}} \frac{b+c}{d+e}$. On pourra constater qu'en effet cette simplification est erronée sur le **contre-exemple** suivant : $\frac{2 \times 4 + 14}{2 \times 5 + 1} \xrightarrow{\text{erreur}} \frac{4 + 14}{5 + 1}$. Avant la simplification abusive, cette expression numérique vaut 2, alors qu'après, elle vaut 3.

- Autre erreur du même genre : $\frac{ab+ac}{ad} \xrightarrow{\text{erreur}} \frac{b+ac}{d}$. Au dénominateur, supprimer le a permet bien de diviser par a . Mais au numérateur, supprimer le a n'a divisé par a que le « ab » et non l'ensemble du numérateur. Il aurait fallu, pour simplifier correctement, commencer par factoriser le numérateur :

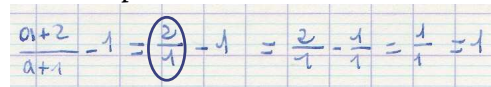
$$\frac{ab+ac}{ad} = \frac{a(b+c)}{ad} = \frac{b+c}{d}$$

Cette erreur consistant à prendre la partie pour le tout survient aussi dans d'autres contextes. On pourrait l'appeler erreur par **synecdoque**.

- On voit parfois des simplifications plus fantaisistes encore :

$$\frac{a^2}{b^2} \xrightarrow{\text{erreur}} \frac{a}{b} \quad \frac{a+d}{b+d} \xrightarrow{\text{erreur}} \frac{a}{b}$$

Voici un exemple, observé en seconde :



Lorsque l'élève a « barré le a en haut et en bas », cela revenait, dans le cas présent, à soustraire a . Or, lorsqu'on soustrait un même nombre

au numérateur et au dénominateur, on obtient une tout autre fraction. Par exemple : $\frac{1+5}{1+2}$ n'a pas la même valeur que $\frac{5}{2}$.

- Une dernière pour la route : $\frac{a}{ab} = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}b} \xrightarrow{\text{erreur}} b$.

Non, le numérateur ne s'anéantit pas au point de faire disparaître avec lui le trait de fraction (et de faire ainsi oublier que b est en position de dénominateur). Cette erreur est similaire à la disparition d'un signe moins observée page 21. Rappelons que « barrer la même chose en haut et en bas » doit s'énoncer plus finement : en fait, on divise par le même nombre le numérateur et le dénominateur. Or le numérateur, divisé par lui-même, donne ce que donne tout nombre non nul divisé par lui-même : non pas *rien*, ni le nombre zéro (qui n'est déjà pas rien), mais le nombre **1**. Pour raconter les choses un peu autrement : $\frac{a}{ab} = \frac{a \times 1}{a \times b} = \frac{\cancel{a} \times 1}{\cancel{a} b} = \frac{1}{b}$.

SIMILITUDE

Certaines des erreurs précédentes peuvent parfois être dues à une confusion entre les règles concernant les fractions et celles concernant les équations. En effet, pour résoudre une équation, on peut multiplier ou diviser ses deux membres par un même nombre. Cela ressemble à la transformation des fractions. Mais dans une équation, on peut aussi ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres. Or ce n'est pas le cas avec les fractions.

Des ressemblances entre deux théorèmes, deux « règles » d'algèbre, engendrent des erreurs qu'on peut appeler *erreurs de similitude*. C'est pourquoi, lorsqu'une règle, un théorème, une transformation, vous

évoque autre chose (« ah oui, ça ressemble... à quoi, déjà ? »), il vaut mieux vous creuser la tête afin de bien chercher à identifier les deux éléments du mélange et remettre chacun à sa place. Parfois, l'intervention d'un interlocuteur est nécessaire.

DISTRIBUTIONS NAÏVES

- Un facteur ne se distribue pas sur un quotient. Exemple d'erreurs :

$$2 \times \frac{3}{7} \not\rightarrow \frac{6}{14} \quad k \times \frac{2}{2-k} \not\rightarrow \frac{2k}{2k-k^2}.$$

Pour éviter ces erreurs, faire apparaître le dénominateur 1 :

$$2 \times \frac{3}{7} = \frac{2}{1} \times \frac{3}{7} = \frac{6}{7} \quad k \times \frac{2}{2-k} = \frac{k}{1} \times \frac{2}{2-k} = \frac{2k}{2-k}$$

Multiplier une fraction par un nombre revient donc à multiplier seulement son numérateur par ce nombre : $a \times \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$.

- Un diviseur ne se distribue pas sur un produit.

L'égalité que nous venons de voir mérite d'être lue aussi dans l'autre sens : $\frac{ab}{c} = a \times \frac{b}{c}$. Alors, la transformation ainsi racontée pourrait se dire ainsi : diviser un produit par un nombre revient à diviser par ce nombre un seul de ses facteurs (cf. p31).

Ainsi $\frac{2a}{3}$ est égal à $\frac{2}{3}a$ (qui se lit deux tiers de a). La seconde forme est souvent préférable.

Sauriez-vous dire ce qu'on doit mettre à la place du « 2 » entouré, qui est erroné ?

$$\frac{(x-1)(x+1)}{2} \not\rightarrow \frac{x-1}{2} \times \frac{x+1}{\textcircled{2}}$$

- Un *moins opposé* pouvant être vu comme un $(-1) \times$, il ne se distribue pas sur un quotient. Exemple d'erreur : $-\frac{a}{b} \not\rightarrow \frac{-a}{-b}$.

D'ailleurs, si c'était le cas, en lisant l'égalité de droite à gauche, on verrait que cela contredit la règle des signes du quotient. L'erreur est similaire à la distribution abusive du signe moins sur le produit, déjà rencontrée pages 30 et 51. On l'évite ainsi :

$$-\frac{a}{b} = (-1) \times \frac{a}{b} = \frac{-1}{1} \times \frac{a}{b} = \frac{-a}{b}.$$

Le signe moins pourrait tout aussi bien passer au dénominateur.

PARENTHÈSES

PARENTHÈSES IMPLICITES

Le trait de fraction joue un rôle de parenthèses :

$$\frac{a-b}{c-d} + e \quad \text{signifie} \quad \left[\frac{(a-b)}{(c-d)} \right] + e.$$

Le dédain à l'égard de ces parenthèses implicites est source d'une erreur fréquente en seconde : $\frac{1}{a} - \frac{1-a}{a} \not\rightarrow \frac{1-1-a}{a} = \frac{-a}{a} = -1$

Alors qu'en explicitant dès le début les parenthèses, l'erreur peut être évitée : $\frac{1}{a} - \frac{(1-a)}{a} = \frac{1-(1-a)}{a} = \frac{1-1+a}{a} = \frac{a}{a} = 1.$



AMBIGUÏTÉ

Il faut veiller à ce que la taille et la position du trait de fraction indiquent clairement ce que l'on veut exprimer.

☀ $\frac{a}{b} + c$ pourrait signifier aussi bien $\frac{a}{b} + c$ que $\frac{a+c}{b}$

☀ $\frac{\frac{a}{b}}{c}$ pourrait signifier $\frac{\frac{a}{b}}{c}$ ou bien $\frac{a}{\frac{b}{c}}$.

Dans ce souci d'éviter l'ambiguïté, le trait de fraction principal, en plus d'être plus long que les autres, doit se situer au niveau de la ligne d'écriture.

QUOTIENT DE FRACTIONS

Rappelons que nous avons commencé par présenter l'inverse comme étant le nombre qui « fait le contraire » du point de vue de la multiplication (p52). Par conséquent :

Diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse.

Ce théorème peut servir à calculer un quotient de fractions, en les ramenant à des produits de fractions :

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$$

Pour comprendre ce qui s'est passé, il faut voir le grand trait de fraction central comme un signe de division (mais les deux autres comme de simples traits de fraction) : diviser par $\frac{5}{7}$ revient à multiplier par $\frac{7}{5}$.

Nous avons vu, page 54, que l'inverse d'une somme n'était pas la somme des inverses. Cette distribution naïve de l'opérateur « inverse-

de » provoque des erreurs du genre : $\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} \rightarrow 1 \times (2+3) = 5$

La même erreur pourrait aussi être provoquée par une distribution naïve d'un numérateur sur une somme :

$$\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 2 + 3 = 5.$$

L'erreur effective peut être un mélange des deux : une erreur a parfois plusieurs raisons d'advenir. On pourrait dire qu'alors l'erreur est « surdéterminée ».

Pour calculer l'inverse d'une somme, il faut d'abord calculer cette somme : $\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{6}} = \frac{6}{5}$

DIVISER PAR 0

Quotient vient du latin *quotiens*, qui signifie *combien de fois*. Le quotient est le *nombre de fois* que le dividende contient le diviseur. La division est ainsi définie mathématiquement comme *opération inverse* de la multiplication : lorsqu'on multiplie le diviseur par le quotient, on doit retrouver le dividende.

$$\begin{array}{r} 2 \quad | \quad 0 \\ \hline q \end{array}$$

Par conséquent, si $\frac{2}{0}$ (deux divisé par zéro) était égal à un quotient q , il faudrait que $q \times 0 = 2$, ce qui n'est pas possible. Donc $\frac{2}{0}$ n'existe pas. Quand au cas de $\frac{0}{0}$, on tombe sur le problème inverse : tous les

quotients pourraient convenir. Ne sachant lequel choisir, on n'en admet aucun. Donc « $\frac{a}{0}$ » n'a jamais de sens : on ne peut pas diviser par zéro.

Dans ce chapitre de révisions, pour ne pas alourdir le texte, lorsqu'un dénominateur est écrit, il est implicitement supposé non nul. Rigoureusement, il faudrait le préciser à chaque fois.

On ne peut pas diviser par zéro, mais on peut diviser zéro : $\frac{0}{2} = 0$.

D'ailleurs, un quotient ne s'annule que si son numérateur s'annule. Disons-le d'un style plus mathématique : un quotient s'annule si, et seulement si son numérateur s'annule : $\frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

Alors qu'un produit s'annule si, et seulement si l'un de ses facteurs s'annule : $ab = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)$.

Deux remarques de *logique mathématique* au passage :

L'ÉQUIVALENCE LOGIQUE

Le signe « $\Leftrightarrow$ » se lit « équivaut à ». Il se met entre deux *affirmations mathématiques*, pour dire qu'elles sont **équivalentes**, c'est-à-dire qu'elles sont vraies en même temps et fausses en même temps. Il a le même sens qu'un « si, et seulement si ».

LE « OU » MATHÉMATIQUE.

Le « ou » de la langue courante est plutôt un ou *exclusif*. C'est-à-dire un « ou » dans lequel chaque possibilité offerte *exclue* l'autre. Ainsi, dans la phrase : « Il faut choisir : tu entres ou tu sors ! », on imagine mal que le locuteur envisage d'offrir à son interlocuteur la possibilité de sortir et d'entrer à la fois : au contraire, il manifeste que si c'est

l'un, c'est pas l'autre.

Le « ou » mathématique, en revanche, est **par défaut** un ou *inclusif*, c'est-à-dire un « ou » qui inclut le « et ». C'est un « *ou* ou *et* ». L'affirmation « $a=0$ ou $b=0$ » est donc (encore) considérée comme vraie, même lorsque les variables a et b s'annulent toutes deux.

XII. RACINE

GÉNÉRALITÉS

RACINE CARRÉE

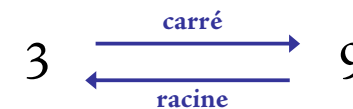
Dans ce paragraphe, *racine* signifiera **par défaut** *racine carrée*, c'est-à-dire en fait racine *du* carré : ce qu'il y avait au début, à la racine, avant qu'on élevât au carré.

DÉFINITION

La **racine** d'un nombre A est le nombre positif dont le carré est égal à A .

EXEMPLE

Trois est la racine de neuf, car neuf est le carré de trois.



THÉORÈME

Tout réel positif admet une unique racine.

Exemple

Même la racine de 2 a elle-même une racine, qu'on peut appeler « racine de racine de 2 » (et qui a elle-même une racine...).

Commentaire

Les nombres strictement négatifs n'ont pas de racines parmi les nombres réels, parce que le carré d'un réel ne saurait être négatif.

Démonstration

Existence

Il est difficile de démontrer l'existence de la racine de tout nombre positif. L'existence de la racine de 2, par exemple, ne va pas de soi. Cette existence des racines est admise au lycée. Il faudrait, pour la démontrer, utiliser le *théorème des valeurs intermédiaires*, qui est à peine abordé en terminale. L'idée, c'est que, lorsqu'on fait varier continûment x de 1 à 2, son carré, x^2 , varie continûment de 1 à 4. Ce carré doit donc bien atteindre la valeur intermédiaire 2. Il faut donc bien qu'il existe un réel dont le carré est 2.

Unicité

Supposons qu'un nombre ait deux racines, que nous noterons r et r' .

$$\text{Alors} \quad r^2 = r'^2$$

$$\text{donc} \quad r^2 - r'^2 = 0$$

$$\text{donc} \quad (r - r')(r + r') = 0$$

Or, pour qu'un produit s'annule, il faut qu'au moins l'un de ses facteurs d'annule.

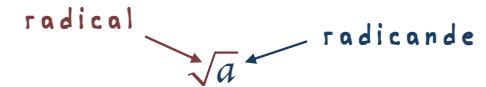
$$\text{donc} \quad r - r' = 0 \quad \text{ou} \quad r + r' = 0$$

$$\text{donc} \quad r = r' \quad \text{ou} \quad r = -r'$$

Mais comme r et r' sont de même signe (car les racines sont, par définition, positives), $r = r'$: les deux racines n'en font donc qu'une.

NOTATION

Radical



Le **radical** est le « signe racine ». Le **radicande** est ce qu'il y a dessous : le nombre dont on prend la racine. C'est parce que nous avons préalablement démontré l'unicité de la racine qu'une telle notation est possible.

Formulation littérale de la définition

La définition de la racine s'écrit alors : $A = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2 = B \\ A \geq 0 \end{cases}$

Rappelons que le signe $\Leftrightarrow$ se lit « équivaut à ». L'accolade signifie « et ». On pourrait encore écrire la définition : $\begin{cases} \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a \\ \sqrt{a} \geq 0 \end{cases}$

($\sqrt{a} \geq 0$ sera ici lu de préférence : « racine de a est positif ».)

C'est donc par définition, que $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$.

Ambiguïté

Le trait supérieur du *radical* joue un rôle de parenthèses. Il était d'ailleurs utilisé en ce sens par certains mathématiciens, avant que les parenthèses ne s'imposassent. Ainsi : $2 \times \overline{2+1}$ signifiait $2 \times (2+1)$. Il faut donc veiller à ce que ce trait supérieur couvre exactement le terme dont on veut prendre la racine et éviter une écriture ambiguë comme : $\sqrt{4+5}$, donc on ne sait si elle signifie $\sqrt{4}+5$, c'est-à-dire 7, ou

bien $\sqrt{4+5}$, c'est-à-dire 3. Parfois, on termine ce trait en redescendant, de façon à bien marquer l'endroit où il s'arrête : $\sqrt{a+b} + c$.

IRRATIONALITÉ

Les racines incalculables

Certaines racines, à commencer par $\sqrt{2}$, sont « incalculables » : elles ne peuvent s'écrire sans radical. Plus précisément, $\sqrt{2}$ ne peut s'écrire sous forme de fraction : c'est ce qu'on appelle un nombre **irrationnel**. Les nombres **rationnels** étant, au contraire, ceux qui peuvent s'écrire sous forme de fraction. Les nombres *irrationnels* ont une écriture décimale infinie et non **périodique**. Une écriture décimale est dite *périodique*, lorsqu'à partir d'un certain endroit, elle se répète indéfiniment. Exemple : 12,48181818181...

Tous les nombres que l'on peut exprimer avec les notations usuelles, à savoir les dix chiffres, les opérations usuelles et même la virgule, peuvent se mettre sous forme de fraction. Puisque $\sqrt{2}$ ne peut être mise sous forme de fraction, elle est inexprimable de façon classique. Aussi, il était bien nécessaire, pour l'écrire, d'inventer une notation spécifique. Bref : la **valeur exacte** de $\sqrt{2}$, c'est $\sqrt{2}$.

Erreur « épistémologique »



La valeur que donne la calculatrice lorsqu'on lui demande la racine de deux n'est pas une **valeur exacte**, mais une **valeur approchée**. Or il n'est **pas question**, en mathématiques, de travailler avec une *valeur approchée* comme si c'était une *valeur exacte*, ce serait commettre une erreur portant sur la nature même des mathématiques, erreur qu'à

défaut d'autre terme disponible on pourrait appeler « erreur épistémologique ».

Par exemple, si l'on utilise la calculatrice (dans le mode de calcul décimal usuel) pour obtenir l'égalité suivante : $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$, alors on commet une telle erreur, bien qu'on écrive une égalité vraie. Car la calculatrice aura obtenu le résultat en travaillant avec des *valeurs approchées*. Elle calcule une ou deux décimales de plus que son écran ne peut en afficher et fait un arrondi, donc elle affiche finalement 2, mais en tant que *valeur approchée*. Comme nous l'avons dit page 66 : c'est par définition (de la racine), que $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$.

Le « = » mathématique signifie « exactement égal ». Donc les affirmations : « $\frac{7}{3} = 2,333$ », « $\pi = 3,14$ », « $\sqrt{2} = 1,414$ », sont fausses. Pour dire « environ égal », on peut utiliser le signe « $\approx$ » : $\sqrt{2} \approx 1,414$.

Une autre « erreur épistémologique » consisterait à mesurer sur un dessin, pour obtenir une longueur ou un angle. Si vous ne comprenez pas pourquoi cet acte de mesurer n'a aucun sens en mathématiques, il vaut mieux poser la question. S'il fallait **hiérarchiser**, on pourrait dire que les « erreurs épistémologiques » sont les plus graves, puisqu'elles signalent une incompréhension de ce que sont les mathématiques.

Théorème

Lorsque n est un entier naturel, $\sqrt{n}$ est soit un entier soit un **irrationnel**.

Exemples

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ sont des nombres *irrationnels*.

Démonstration

Le cas général demande quelques théorèmes d'*arithmétique* qui ne sont pas abordés en seconde, mais le cas de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ sera traité dans le cours sur les *Ensembles*.

EXTRACTION

Les valeurs approchées sont utiles, y compris en mathématiques. Elles permettent par exemple de vérifier un calcul : si vous avez une calculatrice, vous pouvez lui demander une valeur approchée de l'expression initiale et de votre résultat. Si elles ne coïncident pas, il y a un souci. Si elles coïncident, cela ne prouve certes rien, mais vous avez de bonnes chances tout de même que votre réponse soit juste. Les valeurs approchées peuvent être utilisées dans des démonstrations : c'est en effet une information rigoureuse que de savoir que $\sqrt{2}$ **est compris entre** 1,41 et 1,42 ; autrement dit de connaître l'**encadrement** :

$$\underbrace{1,41}_{\text{valeur approchée par défaut}} \leq \sqrt{2} \leq \underbrace{1,42}_{\text{valeur approchée par excès}}$$

Il existe beaucoup de méthodes, dites d'**extraction des racines carrées**, qui permettent d'obtenir des *valeurs approchées* de racines à la main, à commencer par le tâtonnement. Les premières sont très anciennes, puisqu'on a retrouvé une valeur approchée de la racine de 2 avec une précision équivalente à 5 décimales sur une tablette d'argile datant d'au moins 1600 ans avant J.C.

La plus célèbre, longtemps enseignée en primaire, « qu'on peut

prendre pour une espèce de division »⁴, est aujourd'hui sortie des programmes scolaires (au prétexte que les machines à calculer rendraient sa connaissance obsolète). Si vous souhaitez l'apprendre quand même, je vous recommande de regarder une vidéo à ce sujet. Le format de la vidéo est en effet particulièrement bien adapté à ce genre d'apprentissage.

MONÔME

De même que $5 \times a$ s'écrit $5a$ et que $a \times b$ s'écrit ab ,

$$5 \times \sqrt{2} \text{ s'écrit } 5\sqrt{2}.$$

Il s'agit de voir « $5\sqrt{2}$ » un peu comme « $5a$ », c'est-à-dire comme un *monôme* (voir page 22).

C'est une expression qu'on ne peut pas réduire. (On pourrait certes l'écrire $\sqrt{18}$, mais nous verrons que ce n'est pas souhaitable.)

Il est bon de voir des expressions comme $5\sqrt{2}$ ou $7\sqrt{5}$ comme des *monômes* dont l'unité n'est pas littérale, mais est une racine. On pourra parler d'« **unité irrationnelle** ». De cette façon, il est évident que $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = \boxed{8\sqrt{2}}$. Sur le modèle : $5a + 3a = \boxed{8a}$. Et si ce n'était pas évident, on pourrait toujours proposer une petite factorisation en étape intermédiaire :

$$5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = (5+3)\sqrt{2} = \boxed{8\sqrt{2}}$$

Une somme de monômes d'unités différentes, comme $3\sqrt{2} + 7\sqrt{5}$ est *irréductible*. Sauf qu'il arrive parfois que l'on puisse « convertir » certaines racines en d'autres. Par exemple, nous allons bientôt voir

⁴ Descartes, au début de *La Géométrie*.

que $\sqrt{8}$ peut s'écrire $2\sqrt{2}$. Alors, une somme comme $3\sqrt{2} + 2\sqrt{8}$ pourra être réduite. Pour cela, il faut d'abord prouver que le radical se distribue sur le produit.

DISTRIBUTION

Le radical se distribue sur les produits et les quotients (mais pas sur les sommes).

Autrement dit, la racine du produit est égale au produit des racines, mais la racine de la somme n'est pas égale à la somme des racines.

Présentons les choses littéralement : soient a et b deux réels positifs (avec b non nul dans le second cas) :

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Mais en général : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

En effet, voici un **contre-exemple** : $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$$

DÉMONSTRATION (Cas du produit)

En première lecture, je vous propose de passer ce paragraphe.

Soient a et b deux réels positifs.

On pose $V = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (c'est-à-dire $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$)

$$\text{Alors } V^2 = (\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a}\sqrt{b})(\sqrt{a}\sqrt{b}) = \sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{b} = ab$$

V est un nombre positif dont le carré est ab , donc $V = \sqrt{ab}$.

« SORTIR LES FACTEURS CARRÉS »



La distribution du radical sur les produits permet de « sortir du radical les facteurs carrés » qui sont « cachés » dans le *radicande* :

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2 \times \sqrt{2} = \boxed{2\sqrt{2}}$$

Pour repérer facilement les facteurs carrés « cachés » dans le *radicande*, on peut le *décomposer en facteurs premiers* (voir page 14).

Voyons cela sur un exemple :

$$\begin{aligned} \sqrt{108} &= \sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3} \\ &= \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 3} \\ &= \sqrt{2^2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{3} \\ &= 2 \times 3 \times \sqrt{3} \\ &= \boxed{6\sqrt{3}} \end{aligned}$$

SOMME DE RACINES

INTÉRÊT

L'intérêt de « sortir les carrés de la racine », c'est que cela permet de réduire certaines sommes de racines qu'on aurait pu croire irréductibles. Exemple : on veut tenter de réduire $\sqrt{18} + \sqrt{8}$.

MÉTHODE

Pour commencer, on résiste à la « simili factorisation naïve » (p41) du radical. Je veux dire par là qu'on évite de prétendre que ça ferait $\star \sqrt{26}$. Ensuite, il n'est pas certain *a priori* qu'on pourra réduire la somme de ces deux racines. Mais on peut tenter de le faire, en « sortant les facteurs carrés » :

$$\begin{aligned} \sqrt{18} + \sqrt{8} &= \sqrt{9 \times 2} + \sqrt{4 \times 2} \\ &= \sqrt{9} \times \sqrt{2} + \sqrt{4} \times \sqrt{2} \end{aligned}$$



$$= 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$$

$$= \boxed{5\sqrt{2}}$$

IRRÉDUCTIBILITÉ

Si, après avoir « sorti les carrés », les monômes-racines n'ont pas la même unité, alors leur somme est irréductible.

Par exemples, $3\sqrt{5} + 4\sqrt{10} + 2\sqrt{13}$ est irréductible. C'est un théorème que nous admettons ici car, comme celui de la page 68, sa démonstration requiert elle-même quelques théorèmes d'arithmétique qui ne sont pas abordés en seconde.

RACINE D'UNE SOMME

La racine de la somme n'est pas la somme des racines. Il est certes parfois tentant de distribuer un radical sur une somme, par exemple dans l'expression : $\sqrt{a^2 + b^2}$ (erreur déjà rencontrée page 33). Si d'ailleurs une telle distribution était possible, on pourrait simplifier singulièrement le théorème de Pythagore, en enlevant les carrés de son égalité... Inversement, comme nous venons de le voir, on pourrait facilement se laisser aller à une erreur du genre : $\sqrt{18} + \sqrt{8} \rightarrow \sqrt{18+8} = \sqrt{26}$. Un contre-exemple ne suffira sans doute pas à éliminer « radicalement » ces erreurs, mais en voici un quand même :

- racine de la somme : $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$
- somme des racines : $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$

LES RADICAUX AU DÉNOMINATEUR

UNE RACINE

Que ce soit dans une expression numérique ou algébrique, il est

important de se débarrasser des radicaux au dénominateur car cela permet souvent de remarquer des simplifications qui seraient passées inaperçues autrement. Il est toujours possible d'éliminer les radicaux au dénominateur :

Lorsque le dénominateur est lui-même une racine, il suffit de multiplier « en haut et en bas » par cette racine :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{2}}$$

UNE SOMME DE RACINES

Si le dénominateur est une somme contenant une racine (ou plusieurs), on peut multiplier cette somme par sa **quantité conjuguée**. La quantité conjuguée de « * + ♦ » est tout bêtement « * - ♦ ». Exemple :



$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1 \times (\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1) \times (\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \frac{\sqrt{2}-1}{1} = \boxed{\sqrt{2}-1}$$

Cette astuce fort utile repose sur la troisième identité remarquable.

RACINE D'UNE FRACTION

Lorsqu'il y a une racine de fraction, on peut toujours s'arranger pour n'avoir plus qu'une racine d'entier dans l'expression : on distribue le radical sur le quotient et l'on se ramène ainsi au cas du paragraphe précédent :

$$\sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} = \boxed{\frac{2}{3}\sqrt{6}}$$

FORME « NORMALISÉE »

Autant que possible, une expression numérique est à mettre par ordre de priorité sous la forme :

Exemples :

• D'un entier	5
• D'une fraction irréductible	$\frac{2}{3}$
• $n\sqrt{p}$, où n et p sont des entiers et où p le plus petit possible. Autrement dit, il faut « sortir les facteurs carrés de la racine ».	$3\sqrt{2}$
• $\frac{n}{d}\sqrt{p}$, où $\frac{n}{d}$ est une fraction irréductible et p un entier le plus petit possible (ou éventuellement $\frac{\sqrt{p}}{d}$, ni n vaut 1).	$\frac{2}{3}\sqrt{5}$
• D'une somme d'expressions des formes précédentes.	$2\sqrt{3} + \frac{3}{4}\sqrt{2}$

EXEMPLE ÉLÉMENTAIRE

On ne laisse pas $\sqrt{1}$ à la fin d'un calcul. Il faut aller jusqu'au bout et écrire 1.

EN RÉSUMÉ

On sort un maximum de carrés du radical et l'on se débarrasse des racines au dénominateur.

RACINE CUBIQUE

On généralise la notion de racine *carrée* à d'autres puissances. Ainsi, la racine *cubique* de a est le réel dont le cube est égal à a . On le note $\sqrt[3]{a}$. On a par exemple : $\sqrt[3]{8} = 2$. Les nombres négatifs ont des racines cubiques. Par exemple, $\sqrt[3]{-8} = -2$ car $-8 = (-2)^3$.

XIII. PUISSANCE

PRÉSENTATION

CAS CLASSIQUE

$$2^5 = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{5 \text{ facteurs}}$$

Une *puissance* est d'abord une façon de noter un « *poly-produit* » (p13) dont tous les termes sont égaux : $aaaaaaaaaa$ peut s'écrire a^{11} , qu'on lit « a puissance onze » ou encore, de façon abrégée : « a onze ». Ce qui n'est pas la même chose que $11a$, lequel signifie $a+a+a+a+a+a+a+a+a+a+a$. C'est d'ailleurs pour éviter la confusion (pour l'oreille) qu'on n'écrit jamais ~~a~~11. Le *coefficient* est toujours devant alors que l'**exposant** est toujours derrière. L'*exposant*, c'est ainsi qu'on appelle ce nombre qu'on écrit en petit, en haut à droite. On l'écrit en haut, donc on l'*expose*. Il dit combien il y a de facteurs égaux dans le poly-produit. Ce qu'on appelle la **puissance**, c'est le résultat.

EXPOSANT NÉGATIF

Lorsque l'exposant devient *négatif*, on peut continuer à donner un sens à la puissance, à condition qu'on renonce à ce que l'exposant

représente une *quantité* de facteurs. Si vous tapez 2^{-3} sur votre calculatrice, elle devrait afficher, non pas -8 , mais $0,125$. Voyons selon quelle logique elle propose un tel résultat. L'idée, c'est de regarder ce qui se passe lorsque vous diminuez l'exposant d'une unité. Plaçons nous par exemple dans la famille des puissances de 2 :

$$\begin{aligned}
 2^6 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \\
 2^5 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \quad \leftarrow \div 2 \\
 2^4 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \\
 2^3 &= 2 \times 2 \times 2 \\
 2^2 &= 2 \times 2 \\
 2^1 &= 2 \\
 2^0 &= \quad \leftarrow \div 2 \\
 2^{-1} &= \\
 2^{-2} &= \\
 2^{-3} &=
 \end{aligned}$$

Lorsque, parmi les puissances de 2, on diminue l'exposant d'une unité, cela revient à barrer un « $\times 2$ » dans le poly-produit, donc à diviser par 2. Si l'on poursuit cette « logique », pour passer de 2^1 à 2^0 , on va là aussi diviser par 2. Ce qui donne : $2^0 = \frac{2}{2} = 1$. Puis $2^{-1} = \frac{1}{2}$. Etc.

$$\begin{aligned}
 2^3 &= 8 \\
 2^2 &= 4 \\
 2^1 &= 2 \\
 2^0 &= 1 \\
 2^{-1} &= \frac{1}{2} \\
 2^{-2} &= \frac{1}{4} \\
 2^{-3} &= \frac{1}{8}
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\} \rightarrow \text{inverses}$$

Pour obtenir la valeur de 2^{-3} , il n'est pas indispensable de passer par 2^0 , 2^{-1} , 2^{-2} . Il suffit d'avoir remarqué que :

lorsqu'on change l'exposant en son *opposé*, la puissance (le résultat) est changée en son *inverse*.

Cela permet de calculer directement la valeur de 2^{-3} à partir de celle de 2^{+3} : $2^{+3} = 2 \times 2 \times 2 = 8$ donc $2^{-3} = \frac{1}{8}$. Cela permet aussi de définir simplement les puissances d'exposant négatif.

DÉFINITION

Quels que soient le réel a et l'entier naturel n non-nul :

Puissance d'exposant positif : $a^n = \underbrace{aa \dots a}_{n \text{ facteurs}}$

$$a^1 = a$$

Puissance d'exposant négatif : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (lorsque $a \neq 0$)

Puissance d'exposant nul : $a^0 = 1$ (lorsque $a \neq 0$)

0^0 n'est pas défini.

Dans « a^n », n est l'**exposant** et a n'ayant pas de nom officiel je propose de l'appeler la « **base** ». L'opération en elle-même s'appelle l'**exponentiation**. Le résultat est la **puissance**.

LECTURE

a^2 peut se lire « a puissance deux », « a deux » ou « a au carré ».

On n'écrit jamais le coefficient derrière la variable, comme dans « $a2$ », car la lecture orale « a deux » serait alors ambiguë : on ne saurait si le « deux » est un exposant ou un facteur. Placé après la variable, c'est toujours un exposant.

Sans que ce soit toujours conscient, l'habitude est prise, en mathématiques (et il est fortement recommandé de la suivre), de lire :

$a^2 + b^2$: « a deux plus b deux »

$(a+b)^2$: « a plus b ... au carré ».

« Au carré » **connote** l'élévation du tout au carré, alors que « deux », qui ne prend qu'une syllabe, donnera plutôt l'impression de ne concerner que le dernier terme.

EXPOSANT/INDICE

L'exposant, écrit en petit en haut à droite, n'a pas le même rôle qu'un **indice**, écrit en petit en bas à droite. L'indice n'a rien à voir avec les puissances. L'indice est un numéro. La notation indicielle permet de disposer simplement d'une infinité de lettres, pour désigner une infinité d'objets mathématiques : « $a_1 ; a_2 ; a_3 ; a_4 ; a_5 ; a_6 ; \dots$ »

L'indice peut être lui-même une lettre ou une expression : « a_n », « a_{n+1} ».

PRIORITÉ



Par convention, l'exposant est prioritaire sur tous les autres opérateurs, il ne concerne donc que le terme qui le précède (cf p13) :

$-a^2$ signifie $-aa$ et non $(-a)(-a)$.

Remarquons que $-aa$ peut aussi bien se lire $-(aa)$ que $(-a)a$
 $2a^3$ signifie $2aaa$ et non $(2a)(2a)(2a)$

$-2(x-1)^2$ signifie $-2(x-1)(x-1)$

Si l'on veut calculer $-a^2$ lorsque a vaut -2 , il faut remplacer a par -2 , mais avec un peu de méticulosité. En effet, il y a deux signes *moins* : celui qui est devant le a^2 et celui qui est à l'intérieur du a . Le carré va s'appliquer au signe *moins* qui est à l'intérieur du a , mais par à celui qui est devant : $-a^2 = -[(-2)^2] = -(+4) = \boxed{-4}$.

OPÉRATIONS SUR LES PUISSANCES

PRODUIT DE PUISSANCES D'UN MÊME NOMBRE

$$a^n \times a^p = a^{n+p}$$

On peut réduire un produit de puissances d'un même nombre. Alors les exposants s'additionnent. Lorsque les exposants sont positifs, cette

identité se comprend aisément si l'on passe par l'écriture en « poly-produit » : $a^2 a^3 = (aa)(aaa) = aaaaa = a^5$. La règle reste valable avec des exposants négatifs. Ainsi :

$$a^{+2} a^{-5} = aa \times \frac{1}{aaaaa} = \frac{aa}{aaaaa} = \frac{\cancel{aa}}{aaa\cancel{aa}} = \frac{1}{aaa} = a^{-3}.$$

Bien entendu, les étapes intermédiaires deviennent inutiles, à présent que cette règle est un théorème du cours.

Si l'on écrit l'égalité dans l'autre sens, on peut l'interpréter en disant que la « base » transforme les sommes en produits. C'est d'ailleurs une **propriété caractéristique** des puissances que d'opérer ce lien entre l'addition et la multiplication $a^{2+3} = a^2 \times a^3$

Une *propriété caractéristique* est une propriété qui n'appartient qu'à l'objet en question, de sorte qu'elle aurait pu servir de définition. Par exemple, le fait, pour un quadrilatère, d'avoir des diagonales qui se coupent en leurs milieux, **caractérise** le parallélogramme : parmi les quadrilatères, tout parallélogramme a ses diagonales qui se coupent en leur milieux, et seuls les parallélogrammes vérifient cette propriété.

QUOTIENT DE PUISSANCES D'UN MÊME NOMBRE

$$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$$

On peut réduire un quotient de deux puissances d'un même nombre. Alors on soustrait les exposants (celui du numérateur moins celui du dénominateur). Lorsque les exposants sont positifs et n supérieur à p , cette *identité* s'explique aisément : $\frac{a^5}{a^3} = \frac{aaaaa}{aaa} = \frac{aa\cancel{aaa}}{\cancel{aaa}} = aa = a^2$.

Mais cette formule reste valable dans les autres cas.

$$\frac{a^{+2}}{a^{-3}} = a^{(+2)-(-3)} = a^{2+3} = a^5$$

En posant $n=0$, on retrouve la définition des puissances d'exposant négatif (puisque $a^0 = 1$) : $\frac{1}{a^p} = a^{-p}$

SOMME DE PUISSANCES D'UN MÊME NOMBRE

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe sur les polynômes, la somme $x^2 + x^3$, qui est une somme de deux monômes d'unités différentes, est irréductible. En revanche $x^3 + x^3 = 1x^3 + 1x^3 = 2x^3$.

DISTRIBUTION DE L'EXPOSANT

Les exposants se distribuent sur les produits, mais pas sur les sommes :

$$(ab)^n = a^n b^n \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Mais en général : $(a+b)^n \neq a^n + b^n$

Avant d'apprendre une « règle d'algèbre », il faut la saisir intuitivement. Une identité bien comprise est d'ailleurs déjà apprise. Ici, en prenant une valeur simple de n , la démonstration est si courte et si sensible qu'elle est plus facile à retenir que le théorème :

$$(ab)^3 = (ab)(ab)(ab) = ababab = aaabbb = a^3 b^3$$

En mathématiques, si l'on a juste compris « comment faire », on n'a rien compris. Il faut toujours connaître le « pourquoi du comment ». Le fait de se distribuer sur les produits est une propriété qui caractérise les exposants. Lorsqu'un opérateur se distribue sur un produit, c'est que c'est un exposant.

Si les exposants se distribuait sur les sommes, les identités

remarquables n'auraient rien de particulièrement remarquables, on aurait par exemple : $(a+b)^2 \nrightarrow a^2 + b^2$.

Il faut éviter des écritures ambiguës comme : $\frac{a^n}{b}$, car on ne sait pas si l'exposant n porte sur le numérateur : $\frac{a^n}{b}$; ou s'il porte sur tout le quotient : $\left(\frac{a}{b}\right)^n$.

PUISSANCE D'UNE PUISSANCE

$$\left(a^n\right)^p = a^{n \times p}$$

Lorsque les exposants sont positifs, l'écriture en « poly-produit » rend cette identité limpide : $\left(a^2\right)^3 = a^2 \times a^2 \times a^2 = a^6$

RÉCAPITULATIF

$$a^n \times a^p = a^{n+p}$$

$$\frac{1}{a^p} = a^{-p}$$

$$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\left(a^n\right)^p = a^{n \times p}$$

PUISSANCE -1

$a^{-1} = \frac{1}{a}$. Donc a^{-1} est l'inverse de a .

PUISSANCE $1/2$

Les radicaux se distribuent sur les produits : $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$. Or il vient d'être dit (p13) que se distribuer sur les produits était l'apanage des *exposants*. Serait-ce qu'un *radical* est un *exposant* ? Eh bien oui, les

mathématiciens ont eu beaucoup de bonnes raisons de considérer que prendre la racine, revenait à élever à la puissance $\frac{1}{2}$: $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$.

AMBIGUÏTÉ Il faut éviter des écritures ambiguës comme : $\frac{a^n}{b}$, car on ne sait pas si l'exposant n porte sur le numérateur : $\frac{a^n}{b}$; ou s'il porte sur tout le quotient : $\left(\frac{a}{b}\right)^n$.

XIV. VALEUR ABSOLUE

ABSOLU/RELATIF

Un nombre relatif se décompose en deux éléments : son **signe** et sa **valeur absolue** :

signe		valeur absolue
-		5
+		3

Absolu s'oppose à *relatif*. Les nombres inventés d'abord, qu'on pourrait dire « naturels » (même si l'on ne trouve pas de nombres en tant que tels dans la nature), ont une valeur en soi, sans référence à un autre nombre. Mais les nombres relatifs sont placés relativement au nombre *zéro*. « -5 », c'est 5 unités au dessous de zéro. Un nombre relatif est formé à partir d'un nombre « naturel », auquel on adjoint un signe, pour indiquer dans quel sens on s'est déplacé à partir de zéro.

DÉFINITION INFORMELLE

La valeur absolue, c'est le nombre « sans son signe ».

OPÉRATEUR

On peut considérer « valeur absolue » comme un *opérateur* qui « arrache » son signe à un nombre relatif.

NOTATION La valeur absolue de a se note : $|a|$. On lit : « valeur absolue de a ». On peut ainsi écrire :

$$|-5| = 5$$

$$|+5| = 5$$

IDENTIFICATION

Mais, puisque les nombres positifs sont *identifiés* aux nombres « naturels » (on confond 1 et +1), on peut dire aussi que l'opérateur valeur absolue « positive » un nombre : $|-5| = +5$
 $|+5| = +5$

De ce point de vue, l'opérateur *valeur absolue* laisse comme ils sont les nombres positifs, mais prend l'opposé des négatifs, afin de les « positiver ». C'est pourquoi, la définition donnée dans les livres de mathématiques est souvent :

DÉFINITION OFFICIELLE

Soit a un réel. Si $a \geq 0$, $|a| = a$

Si $a < 0$, $|a| = -a$

↑
opposé de

(Si a est positif, on n'y touche pas. S'il est négatif, on en prend l'opposé, de façon à le rendre positif.)

REMARQUES

$-a$ n'est pas forcément un nombre négatif. « $-a$ » signifie l'opposé de a . Si a est négatif, c'est-à-dire si la lettre a « contient un signe moins », l'opposé de a est alors positif.

$\sqrt{a^2} = |a|$. En revanche, $(\sqrt{a})^2$ n'existe que si a est positif.

XV. GLOSSAIRE

prévenir	Avertir (prévenir la police) mais aussi éviter. Ou tenter d'éviter (prévenir une erreur).
concision	Concis : exprimé en peu de mots. Un synonyme : laconique. En latin, <i>considerare</i> signifie « couper en morceaux » (origine commune avec « inciser »).
contrepartie	En contrepartie : en échange, en compensation.
glossaire	Lexique. <i>Glossa</i> , en latin, désigne un terme rare, peu usité, qui a besoin d'une explication. Une <i>glose</i> est originellement une explication d'un mot difficile, en marge d'un texte. Un glossaire est un petit dictionnaire, un lexique, qui se concentre sur les mots rares.
occurrence	Circonstance, apparition (d'un mot, d'un phénomène astronomique). En l'occurrence : en la circonstance. Le mot occurrence peut signifier, pour un mot, son apparition dans un texte. Par exemple, le nombre d'occurrence du mot

« occurrence » dans ce paragraphe est de cinq (le mot est présent cinq fois, en comptant le « titre »).

pléonasme Figure de style qui ajoute une répétition. Comme « monter en haut ». La langue française évite en général les pléonasmes. *Pléon* (ou *pléiôn*) en grec, signifie « plus nombreux, plus grand », comparatif de *polus*, nombreux, grand (→ plus, poly-). Ce mot se rattache à la racine indoeuropéenne °*ple-* (être plein) d'où provient le mot « plein ».

ad hoc Approprié. C'est une locution latine qui signifie littéralement « à cet effet ». Elle a pour synonyme *idone*.

profusion Abondance, surabondance.

néologisme Mot nouveau. Du grec *néos* : nouveau et *logos* : parole.

implicite C'est le contraire de explicite. Ce qui est explicite est ce qui est formulé, exprimé, manifeste. Ce qui est non dit, entre les lignes, tacite, latent, est dit implicite. Les mathématiques sont théoriquement le royaume de l'explicite : il faut tout dire (mais dans la pratique, il y reste toujours un peu d'implicite dans un texte mathématique).

La *foi implicite* est la confiance absolue qu'on accorde à un dogme sans chercher à le comprendre.

Euclide Mathématicien grec, auteur du plus célèbre ouvrage des mathématiques : *les Éléments* (350 av. J.-C.)

acception Signification. Sens particulier d'un mot (parmi d'autres sens du même mot).

cf Abréviation du mot latin *confer* : compare ! (à l'impératif). Autrement dit, « reporte-toi à », « vas voir », « mets en parallèle avec ».
« Cf. chapitre II » a le même sens que « voir chapitre II ».

contre-exemple Pour prouver qu'une règle générale est vraie, un exemple, ou même un milliard d'exemples ne suffisent pas. Pour prouver qu'une règle général est fausse, il suffit de trouver un cas où elle ne fonctionne pas. Cela s'appelle un contre-exemple.

concis Qui exprimer en peu de mots, sans détour. Du latin *concisus* : tranché, court.

ressortit à Est relatif à, dépend de la compétence de. Il y a deux verbes *ressortir* : celui qui signifie « sortir peu après être entré » : il ressort, ils ressortent de la maison. Et « ressortir à » qui signifie « être relatif à », « être du ressort de » qui ne se conjugue pas de la même façon : la langue orale ressortit à l'ethnologie.

droit canon Droit de l'Église. Les *canons* de l'Église, sont les règles, les décrets de conciles en matière de foi et de discipline. Du latin *canon*, règle, modèle (lui-même du grec *kanôn*). Rien à voir avec l'arme, le canon, qui est de la même origine que canne.

abus de langage Voici des exemples d'abus de langage, qui vaudront mieux qu'une longue définition :
« Soit *M* un point ». On devrait dire, « Soit *M* une lettre qui

désigne un point. »

« Je vais boire une tasse de thé », pour dire : « je vais boire le contenu d'une tasse thé ».

synecdoque	Figure de style consistant à prendre la partie pour le tout (ou le tout pour la partie), cas particulier de la métonymie. (La terminologie des figures de style varie d'un auteur à l'autre. Ici, on fait simple.) Exemple : dire « un toit » pour signifier « une maison ».
par défaut	À défaut de précisions. C'est un terme qui vient de l'informatique : les réglages <i>par défauts</i> sont les réglages à la sortie d'usine, qu'on peut toujours modifier par la suite.
épistémologique	Relatif à l'étude des sciences. <i>epistêmê</i> , en grec, c'est la science.
hiérarchiser	Ordonner, classer. Du grec <i>hieros</i> « sacré », comme dans hiéroglyphe ; et <i>arkhê</i> « commandement », comme dans anarchie, oligarchie, monarque.
connote	Évoque. Connoter vient du latin. <i>Cum notare</i> : noter avec. Une connotation est une signification seconde qui s'ajoute à la signification principale.
apanage	Exclusivité. L'apanage était, dans le régime féodal, une portion de territoire accordée à un prince en compensation de son exclusion du pouvoir. « Apaner », c'était donner son <u>pain</u> , sa part, à quelqu'un.